

# XXVII Всероссийская олимпиада школьников по математике

**Какобычно, в дни школьных весенних каникул прошел зональный этап Всероссийской математической олимпиады. В олимпиаде, проходившей в Иванове, Курске, Омске и Челябинске, участвовали более 400 школьников – победителей областных (краевых, республиканских) олимпиад. А с 19 по 26 апреля в Твери был проведен заключительный этап олимпиады, в котором приняли участие 198 победителей зонального этапа и 6 школьников из Болгарии.**

**Варианты заданий оказались достаточно сложными, и, хотя каждую задачу решили, как минимум, семеро, только три участника сумели решить все восемь задач. Это десятиклассники Егор Куликов и Юрий Кудряшов, а также выступавший по 11 классу двукратный победитель Международных математических олимпиад Владимир Барзов из Болгарии.**

**Отметим высокие творческие достижения участников олимпиады: было предложено множество оригинальных решений, некоторые из которых не были известны членам жюри.**

**По результатам олимпиады жюри определило состав команды России на 42 Международную математическую олимпиаду. В нее вошли Сергей Спиридонов (Ижевск), Алексей Глазырин (Челябинск), Михаил Гарбер (Ярославль), Андрей Халавин (Киров), Сергей Соколов (Рыбинск) и Андрей Воробьев (Санкт-Петербург).**

**Ниже приводятся условия задач зонального и заключительного этапов и список призеров олимпиады.**

## ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДЫ

### Зональный этап

8 класс

1. Можно ли числа 1, 2, ..., 10 расставить в ряд в некотором порядке так, чтобы каждое из них, начиная со второго, отличалось от предыдущего на целое число процентов?

*Р. Женодаров*

2.  $N$  цифр – единицы и двойки – расположены по кругу. Изображенным назовем число, образованное несколькими цифрами, расположенными подряд (по часовой стрелке или против часовой стрелки). При каком наименьшем значении  $N$  среди изображенных могут оказаться все четырехзначные числа, запись которых состоит только из цифр 1 и 2 (в том числе 1111 и 2222)?

*С. Волчёнков*

3. Все стороны выпуклого пятиугольника равны, а все углы различны. Докажите, что максимальный и минимальный углы этого пятиугольника прилегают к одной его стороне.

*Д. Джукич*

4. Угольком размера  $n \times m$ , где  $m, n \geq 2$ , называется фигура, получаемая из прямоугольника размера  $n \times m$  клеток удалением прямоугольника размера  $(n-1) \times (m-1)$  клеток.

Два игрока по очереди делают ходы, заключающиеся в закрасивании в уголке произвольного ненулевого количества клеток, образующих прямоугольник или квадрат. Пропускать ход или красить одну клетку дважды нельзя. Проигрывает тот, после чьего хода все клетки уголка окажутся окрашенными. Кто из игроков победит при правильной игре?

*Д. Храмов*

5. Пусть  $a, b, c, d, e$  и  $f$  – некоторые числа, причем  $ace \neq 0$ . Известно, что  $|ax + b| + |cx + d| = |ex + f|$  при всех значениях  $x$ . Докажите, что  $ad = bc$ .

*Р. Женодаров*

6. Натуральное число  $n$  назовем *хорошим*, если каждое из чисел  $n, n+1, n+2$  и  $n+3$  делится на сумму своих цифр. (Например,  $n = 60398$  – хорошее.) Обязательно ли предпоследней цифрой хорошего числа, оканчивающегося восьмеркой, будет девятка?

*В. Замков*

7. Можно ли клетки доски  $5 \times 5$  покрасить в 4 цвета так, чтобы клетки, стоящие на пересечении любых двух строк и любых двух столбцов, были покрашены не менее чем в 3 цвета?

*О. Подлипский*

8. Докажите, что любой треугольник можно разрезать не более чем на 3

части, из которых складывается равнобедренный треугольник.

*Л. Емельянов*

9 класс

1. См. задачу 1 для 8 класса.

2. Петя и Коля играют в следующую игру: они по очереди изменяют (увеличивают или уменьшают) один из коэффициентов  $a$  или  $b$  квадратного трехчлена  $f = x^2 + ax + b$ : Петя на 1, Коля – на 1 или на 3. Коля выигрывает, если после хода одного из игроков получается трехчлен, имеющий целый корень. Верно ли, что Коля может выиграть при любых начальных целых коэффициентах  $a$  и  $b$  независимо от игры Пети?

*Н. Агаханов*

3. В параллелограмме  $ABCD$  на сторонах  $AB$  и  $BC$  выбраны точки  $M$  и  $N$  соответственно так, что  $AM = NC$ ,  $Q$  – точка пересечения отрезков  $AN$  и  $CM$ . Докажите, что  $DQ$  – биссектриса угла  $D$ .

*Л. Емельянов*

4. Мишень представляет собой треугольник, разбитый тремя семействами параллельных прямых на 100 равных правильных треугольничков с единичными сторонами. Снайпер стреляет по мишени. Он целится в треугольничек и попадает либо в него, либо в один из соседних с ним по стороне. Он видит результаты своей стрельбы и может выбирать, когда стрельбу заканчивать. Какое наибольшее число треугольничков он может с гарантией поразить ровно по пять раз?

*Ю. Лифшиц*

5. Внутри выпуклого пятиугольника выбраны две точки. Докажите, что можно выбрать четырехугольник с вершинами в вершинах пятиугольника так, что внутрь него попадут обе выбранные точки.

*В. Дольников*

6. Существует ли такое натуральное число, что произведение всех его натуральных делителей (включая 1 и само число) оканчивается ровно на 2001 ноль?

*А. Храбров*