ны соответствующим радиусам вращения, т.е. отрезкам CA и CB. Таким образом можно вычислить скорость любой точки, лежащей на этом отрезке или жестко связанной с этим отрезком. Если, например, с отрезком AB жестко связана некоторая фигура, то скорость любой ее точки P равна произведению $\omega \cdot CP$.

Вернемся теперь к кривым постоянной ширины. Пусть отрезок AB катится по кривой SS. Так как скорости $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$ перпендикулярны радиусам CA и CB, то они параллельны между собой. Но скорость $\vec{v}_A$ направлена по касательной к траектории точки A, а скорость $\vec{v}_B$ – по касательной к траектории точки B. Следовательно, эти касательные параллельны друг другу, и расстояние между ними все время остается равным AB. Но это значит, что траектории A_1A_2 и B_1B_2 можно рассматривать как участки некоторой кривой постоянной ширины.

Однако нам нужно построить не два участка, а всю такую кривую. Если мы хотим сделать это с помощью описываемой операции, то должны выбрать линию SS так, чтобы, обкатывая ее, отрезок AB повернулся на 180°, т.е. чтобы точка A пришла в положение B, а точка B – в положение A. Одна из таких линий – $PQRP$ – показана на рисунке 6. Проследим более подробно, как отрезок AB обкатывает ее.

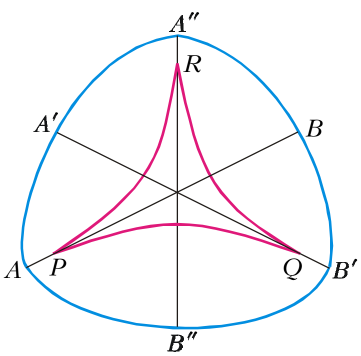

Рис. 6

Сначала он катится по участку PQ и приходит в положение $A'B'$, при этом его концы описывают дуги AA' и BB'. Затем он катится по участку QR, и его концы описывают дуги $A'A''$ и $B'B''$. Наконец, он обкатывает участок RP, а его концы движутся по дугам $A''B$ и $B''A$. В результате точка A приходит в положение B, а точка B – в положение A, и кривая постоянной ширины замыкается. При этом дуги PQ, QR и RP могут иметь любую форму и не обязательно должны быть одинаковыми. Единственное, что от них требуется, – это чтобы они были выпуклыми и касались друг друга так, как это показано на рисунке 6. Что касается отрезков AP и PB, то их длина не может быть произвольной, ибо тогда дуга, описываемая точкой A, не вольется в дугу, описываемую точкой B. Здесь можно поступить следующим образом. Проведем через точку P прямую, касающуюся дуги PQ, и поставим на ней точку A. Заставим теперь эту прямую обкатывать линию $PQRP$. Тогда конец дуги, которую опишет при этом точка A, определит положение точки B.

Линия $PQRP$, показанная на рисунке 6, состоит из трех дуг. Но число дуг может быть и большим. Например, на

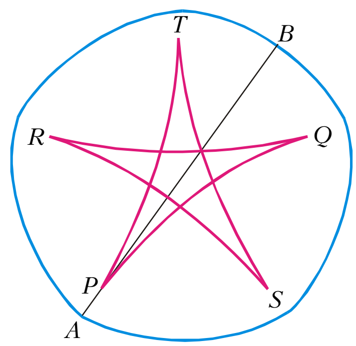

Рис. 7

рисунке 7 изображена кривая постоянной ширины, полученная при обкатывании линии $PQRSTP$, состоящей из пяти дуг.

Кривые постоянной ширины обладают еще одним свойством, роднящим их с окружностью: периметр кривой постоянной ширины равен $l = \pi D$, где D – ширина этой кривой. Действительно, пусть горизонтальная прямая PQ перемещается с помощью катков постоянной ширины (рис.8). Рассмотрим один из этих катков, например

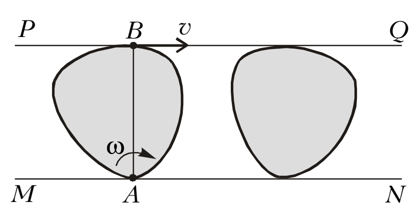

Рис. 8

левый. Пусть его ширина D, а периметр l. Когда прямая PQ передвинется настолько, что этот каток сделает один оборот, он сместится относительно прямой MN на расстояние l вправо. А так как он катится не только по прямой MN, но и по прямой PQ, то после одного оборота он окажется смещенным относительно прямой PQ на расстояние l влево. Следовательно, перемещение прямой PQ относительно прямой MN будет равно $2l$. А так как это же смещение равно vt, где t – время, за которое каток делает один оборот, то

$$2l = vt.$$

(Мы считаем, что прямая PQ движется с постоянной скоростью.) Мгновенный центр вращения катка находится в точке A, значит, скорость перемещения равна

$$v = \omega \cdot AB = \omega D,$$

где ω – угловая скорость катка. Тогда

$$2l = \omega D t.$$

Но ωt есть угол поворота катка за один оборот, следовательно,

$$\omega t = 2\pi, \text{ и } 2l = 2\pi D,$$

откуда

$$l = \pi D.$$

Таким образом, периметр кривой постоянной ширины вычисляется так же, как периметр окружности. А какова площадь, ограниченная кривой постоянной ширины? Можно ли ее вычислять так же, как площадь круга? Оказывается, нет. Однако площадь кольца постоянной ширины можно вычислять, как площадь кольца между двумя концентрическими окружностями.

Рассмотрим кривую постоянной ширины. Через произвольную точку на ней проведем нормаль (нормалью называется прямая, перпендикулярная касательной) и отложим вдоль нее отрезок заданной длины. Отложив такие отрезки от каждой точки данной кривой, получим новую кривую, являющуюся геометрическим местом концов отложенных отрезков. Очевидно, она тоже будет иметь постоянную ширину. При этом площадь, заключенная между этими кривыми, будет равна разности площадей фигур, ограниченных наружной и внутренней кривыми.

Попробуйте доказать это самостоятельно.

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:

Курьер образования
http://www.courier.com.ru

Vivos Voco!
http://vivovoco.nns.ru
(раздел «Из номера»)