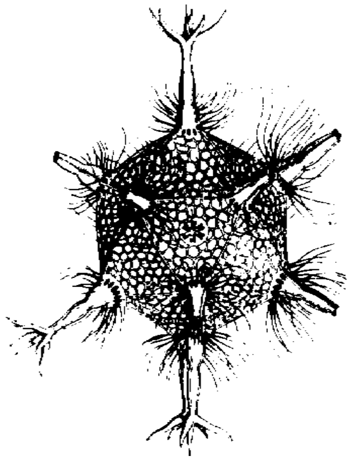

Рис.1

плоских или двугранных углов, площадей граней и, вообще, от всего, что так или иначе определяется расстоянием между точками.

Вторая замечательная теорема была доказана в 1813 году французским математиком Огюстеном Коши. Эта теорема утверждает, что если из данных плоских многоугольников, взятых в одинаковом порядке, можно склеить выпуклый многогранник, то такой многогранник будет единственным. В частности, теорема Коши объясняет то, что известно каждому, кто клеил или держал в руках картонную модель многогранника: ее жесткость. Это свойство удивляет потому, что многогранник, казалось бы, должен задаваться не только своими гранями, но и двугранными углами. Смотрите: для задания многоугольника, если это не треугольник, недостаточно только длин сторон, нужно задать и углы. А вот многогранник задается однозначно лишь своими гранями. И это несмотря на то, что каждые две смежные по ребру грани, взятые сами по себе, легко поворачиваются вокруг общего ребра, словно книжные страницы вокруг корешка... В процессе склеивания модель будущего многогранника какое-то время сохраняет подвижность из-за изменения двугранных углов. Но как только заклеивается последняя грань, двугранные углы фиксируются и модель становится жесткой. Доказательство теоремы Коши элементарное, что не означает «легкое». Однако единственное, что нужно знать помимо школьной программы, чтобы понять доказательство, – это теорема Эйлера.

Третья совершенно удивительная теорема была открыта и доказана выдающимся геометром XX века академиком Александром Даниловичем Александровым (1912–1999). Если теорема Коши говорит о единственности выпуклого многогранника с данной разверткой его граней, то теорема Александрова сообщает необходимые и достаточные условия, при которых из развертки можно склеить выпуклый многогранник. Как мы увидим позже, в отличие от теоремы Коши, теорема Александрова весьма неожиданна. Многие развертки, удовлетворяющие условиям Александрова, кажутся непригодными для того, чтобы из них можно было склеить какой-либо многогранник. Но уверенность в том, что теорема верна, заставляет искать и в итоге находить тот многогранник, который склеивается из данной развертки. В отличие от предыдущих теорем доказательство теоремы Александрова неэлементарное и трудное.

Многогранник – это тело или поверхность?

Одни считают, что многогранник – это поверхность, состоящая из плоских граней. Другие возражают: нет, многогранник – это трехмерное тело, ограниченное плоскими многоугольниками. Кто прав? И те, и другие. Все зависит от контекста. Для столяра, сколачивающего ящик из шести фанерных прямоугольников, параллелепипед – это поверхность, а для каменщика, возводящего кирпичную стену, параллелепипед – это, наверное, тело. В этой статье мы будем представлять многогранник в основном как поверхность.

Будем называть *многогранником* множество M плоских выпуклых многоугольников – *граней*, расположенных в пространстве так, что

1) каждая сторона любого многоугольника является стороной в точности еще одного многоугольника из M (эта сторона, общая для двух многоугольников, называется *ребром*);

2) от каждого многоугольника из M к любому другому можно пройти по цепочке многоугольников из M, в которой каждые два последовательны многоугольника смежны по общей стороне;

3) если два многоугольника имеют общую вершину, то такую цепочку можно составить из многоугольников, сходящихся в этой вершине.

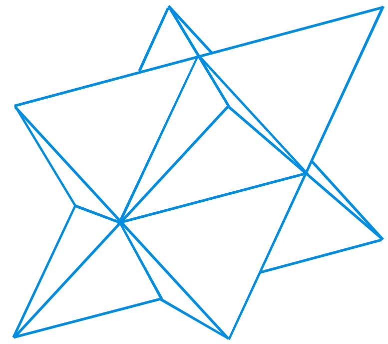

Рис.2

Фигура на рисунке 2 является многогранником. Совокупность из 18 квадратов на рисунке 3 многогранником не является, потому что в ребре AB нарушается условие 1), а в

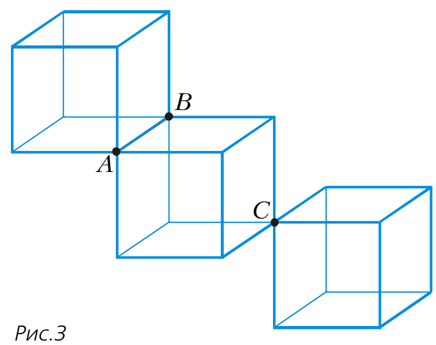

Рис.3

вершине C не соблюдается условие 3).

Упражнение 1. Докажите, что в любом многограннике имеются по крайней мере две одноименные грани.

Многогранник называется *выпуклым*, если он целиком лежит по одну сторону от плоскости каждой его грани.

Теорема Эйлера

Эта теорема впервые появилась в журнале Петербургской Академии наук в работах Леонарда Эйлера[1] «Элементы учения о телах» и «Доказательство некоторых замечатель-

---

[1] *Леонард Эйлер (1707, Базель, Швейцария – 1783, Санкт-Петербург), гениальный математик, в течение 31 года проработал в Петербурге, член Петербургской Академии наук. Нам, гражданам России XXI века, любопытно узнать, что современник Эйлера знаменитый математик Иоганн Бернулли в связи с переездом Эйлера из Швейцарии в Россию писал: «Лучше несколько потерпеть от сурового климата страны льдов, в которой приветствуют муз, чем умереть от голода в стране с умеренным климатом, в которой муз презирают и обижают». Общепризнано, что Эйлер на проглядел ничего в современной ему математике, хотя последние семнадцать лет своей жизни он был слепым.*