Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 ноября 2001 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №4 – 2001» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1781» или «Ф1788». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1781 – М1783 предлагались на LXIV Московской математической олимпиаде этого года.

Задачи Ф1788 – М1792 предлагались в этом году на Московской физической олимпиаде .

Задачи М1781—М1785, Ф1788 — Ф1792

М1781. Начальник охраны хочет расставить часовых вокруг лагеря так, чтобы ни к лагерю, ни к часовым нельзя было незаметно подкрасться. Каждый часовой имеет прожектор, который может освещать отрезок длиной 100 м. Сможет ли начальник исполнить свой замысел?

В.Клепцын

М1782. Докажите, что для любого натурального n существует лишь конечное число решений неравенства $\left|x! - y^y\right| < n$ в натуральных числах x и y.

С.Злобин

М1783. В треугольнике ABC проведены высота AH, биссектриса BL и медиана CM. Оказалось, что треугольник HML равносторонний. Докажите, что треугольник ABC равносторонний.

Р.Женодаров

М1784. На доске записаны все целые числа от 1 до 2000.

а) Наугад стирают 998 чисел. Докажите, что среди оставшихся чисел можно указать несколько (не менее двух) так, что их сумма тоже имеется на доске.

б*) Наугад стирают 89 чисел. Докажите, что среди оставшихся можно указать 20 чисел так, что их сумма тоже имеется на доске. Останутся ли справедливы утверждения, если стереть еще одно число?

Ф.Шлейфер

М1785. Остров разделен на княжества.

а) Каждое княжество представлено на карте острова равносторонним треугольником. Докажите, что для правильной раскраски карты достаточно двух красок.

б*) Каждое княжество представлено на карте равнобедренным прямоугольным треугольником. Докажите, что для правильной раскраски карты достаточно четырех красок. (Раскраска является правильной, если всякие два княжества, имеющие общий участок границы, окрашены в разные цвета.)

В.Произволов

Ф1788. Два тонких стержня помещены в воду так, что они параллельны и расстояние между ними равно a. По одному из стержней резко ударяют. Через какое время звук от удара дойдет до точки на втором стержне, удаленной от места удара на расстояние $\sqrt{a^2 + l^2}$, если скорости звука в воде и в стержне равны u и v соответственно?

Д.Харабадзе

Ф1789. В системе, изображенной на рисунке 1, нить невесома и нерастяжима, блоки невесомы, трения нет. Вначале нить удерживают так, что груз массой m висит неподвижно, а груз массой $2m$ касается пола. Затем конец нити начинают тянуть вверх с постоянной скоростью v. Как при этом будут двигаться оба груза?

М.Семенов

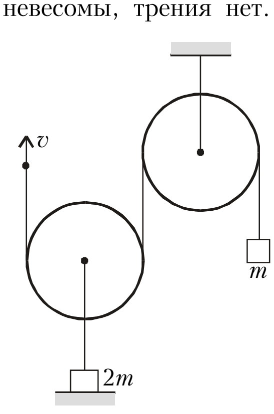

Рис.1

Ф1790. В покоящемся сосуде объемом $V = 31$ л с очень жесткими и совершенно не проводящими тепло стенками находятся воздух при нормальных условиях и вода массой $m = 9$ г. Сосуд практически мгновенно приобретает скоростью u и движется поступательно. После установления теплового равновесия воздух в сосуде имеет влажность $\varphi = 50\%$. Найдите скорость u. Удельная теплота парообразования воды L = 2,2 Мдж/кг, удельная теплоемкость воды c = 4200 Дж/(кг · К), давление насыщенных паров воды при нормальных условиях p = = 600 Па, удельная теплоемкость воздуха при постоянном объеме c_V = 720 Дж/(кг · К), средняя молярная масса воздуха M = 0,029 кг/моль.

С.Варламов

Ф1791. Одно колено гладкой изогнутой трубки с круглым внутренним сечением площадью S вертикально, а другое наклонено к горизонту под углом α (рис.2). В трубку налили жидкость плотностью ρ и массой M так, что ее уровень в наклонном колене выше, чем в вертикальном, которое закрыто легким поршнем, соединенным с вертикальной пружиной жесткостью k. Найдите период малых колебаний этой системы. Ускорение свободного падения равно g.

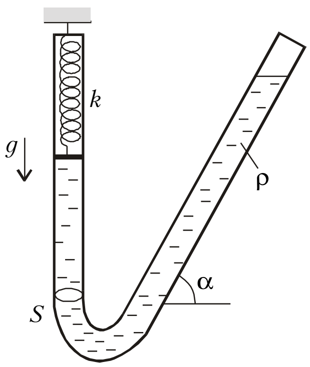

Рис.2

М.Семенов

Ф1792. Ацетон и бензол смешиваются друг с другом в любых пропорциях, образуя прозрачный раствор. Объем смеси равен суммарному объему компонентов до смешивания. Коэффициент преломления света в смеси n зависит от концентраций молекул ацетона $N_{\text{а}}$ и бензола $N_{\text{б}}$ следующим образом: $n^2 = 1 + K_{\text{а}}N_{\text{а}} + K_{\text{б}}N_{\text{б}}$, где $K_{\text{а}}$ и $K_{\text{б}}$ – некоторые константы (поляризуемости молекул ацетона и бензола). В колбе находится V = 200 мл смеси ацетона и бензола при температуре $t_1 = 50\ ^\circ\mathrm{C}$. Палочка из стекла, опущенная в колбу, освещается светом с длиной волны λ = 546 нм и не видна в этом растворе при данной температуре. Сколько миллилитров и какой жидкости – ацетона или бензола – нужно долить в колбу после ее охлаждения до температуры $t_2 = 20\ ^\circ\mathrm{C}$, чтобы после размешивания раствора стеклянная палочка не была видна при том же освещении? Коэффициенты преломления света с данной длиной волны у этих жидкостей при температуре t_2 равны $n_{\text{а}} = 1{,}36$ и $n_{\text{б}} = 1{,}50$ соответственно, а у стекла – $n_{\text{с}} = 1{,}47$. Коэффициенты объемного расширения обеих жидкостей в диапазоне температур от t_2 до t_1 одинаковы и равны $\alpha = 0{,}00124$ 1/К. Тепловым расширением стекла и испарением жидкостей пренебречь.

С.Варламов