

количество гирек (больше 2, разумеется). Кроме того, в примере предыдущего пункта нам удалось вычислить примечательные наборы, состоящие из семи гирек различных масс, в частности 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13. Способ, с помощью которого мы это сделали, позволяет легко произвести проверку примечательности этого набора:

$$\begin{aligned} 3 + 5 + 7 + 9 &= 11 + 13, \\ 1 + 9 + 13 &= 5 + 7 + 11, \\ 9 + 13 &= 1 + 3 + 7 + 11, \\ 1 + 9 + 11 &= 3 + 5 + 13, \\ 1 + 3 + 5 + 11 &= 7 + 13, \\ 1 + 5 + 13 &= 3 + 7 + 9, \\ 7 + 11 &= 1 + 3 + 5 + 9. \end{aligned} \quad (3)$$

Существуют ли примечательные наборы с меньшим количеством различающихся по массе гирек?

Упражнения

2. Покажите, что не существует примечательного набора с тремя гирьками, массы которых попарно различны.

3. Покажите, что не существует примечательного набора с пятью гирьками, массы которых попарно различны.

Таким образом, 7 — минимальное число гирек, которое может содержать

примечательный набор, если массы его гирек попарно различны.

Хорошо, а как быть с большим количеством гирек? Всегда ли существуют наборы, содержащие 9, 11, 13, ... различающихся по массе гирек?

Ответ на этот вопрос положительный. Сейчас мы построим некоторую конструкцию, позволяющую продолжить уже известный нам ряд $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 7, a_5 = 9, a_6 = 11, a_7 = 13$.

Заметим, что в каждом из равенств (3) присутствуют «разделенные соседи»: в левой части найдется такое число, для которого в правой части обнаруживается соседнее с ним нечетное число (число, отличающееся на 2). Если эти два «соседа» поменять местами, то для восстановления «равновесия» в ту часть, куда переместится меньшее число, нужно добавить 4. Следовательно, если два новых члена будут отличаться друг от друга на 4, то их всегда возможно добавить в разные части любого из равенств (3), предварительно переставив в нем двух «соседей» так, чтобы равенство при этом не нарушилось.

Положим $a_8 = x, a_9 = x + 4$, где x есть

решение уравнения

$$\sum_{i=2}^7 a_i = a_1 + x + 4.$$

Гирьки с массами a_1, a_2, \dots, a_9 образуют новый примечательный набор. Действительно, семь прежних равенств (3) можно «подправить» описанным выше способом. К ним добавляются два новых равенства:

$$\begin{aligned} a_2 + \sum_{i=3}^7 a_i &= a_1 + a_9, \\ a_1 + \sum_{i=3}^7 a_i &= a_2 + a_8. \end{aligned}$$

Заметим, что во вновь полученных равенствах снова присутствуют «разделенные соседи», так что процесс образования новых членов можно продолжить: $a_{10} = y, a_{11} = y + 4$, где y есть решение уравнения

$$\sum_{i=2}^9 a_i = a_1 + y + 4,$$

и так далее.

Упражнение 4. Примечательный набор состоит из пяти гирек. Какими могут быть их массы?