Ортоцентрический треугольник

А.ЕГОРОВ

В этой статье мы поговорим о высотах треугольников.

Напомним прежде всего, что во всяком треугольнике высоты (точнее — прямые, на которых они лежат) пересекаются в одной точке, называемой *ортоцентром*.

Вот изящное доказательство этого факта. Возьмем произвольный треугольник ABC. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — его высоты. Через вершины A, B и C проведем прямые, параллельные противоположным сторонам (рис.1). В

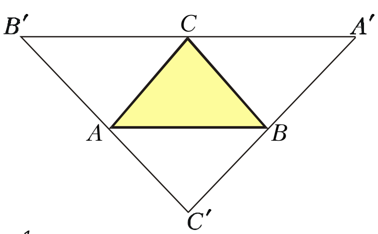

Рис. 1

результате получится треугольник $A'B'C'$, стороны которого параллельны AB, BC и AC соответственно. Прямые, перпендикулярные $A'B'$ в точке C, $B'C'$ в точке A и $A'C'$ в точке B, т.е. серединные перпендикуляры к сторонам треугольника $A'B'C'$, пересекаются в точке H — центре описанной около $A'B'C'$ окружности. Но каждая из высот треугольника ABC лежит на одной из этих прямых.

Упражнение 1 (теорема Эйлера). Докажите, что во всяком треугольнике точка пересечения медиан M, центр описанной окружности O и ортоцентр H

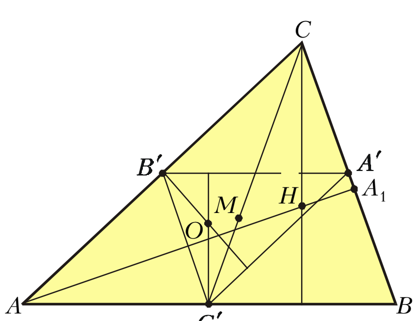

Рис. 2

лежат на одной прямой, и найдите, в каком отношении точка M делит отрезок OH. *Указание*. Пусть A', B', C' — середины сторон треугольника ABC (рис.2), H — его ортоцентр, O — центр описанной окружности, а M — центр тяжести. Заметим, что точка O − ортоцентр треугольника $A'B'C'$, а при гомотетии с коэффициентом -2 и центром в точке M точки A', B', C' переходят в точки A, B и C соответственно, а точка O — в H.

При этом ортоцентр H лежит внутри треугольника ABC, если он остроугольный, и вне него, если ABC — тупоугольный треугольник (рис. 3, *а*, *б*). Для прямоугольного треугольника ортоцентр совпадает с вершиной прямого угла (рис. 3, *в*).

Попутно отметим, что для тупоугольного треугольника ABC треугольник AHB (см.рис.3,*б*) — остроугольный с высотами AB_1, BA_1, HC_1 и ортоцентром C. Это замечание будет нам полезно в дальнейшем. Стоит также обратить внимание на то, что каждая из четырех точек A, B, C и H является ортоцентром треугольника, образованного остальными тремя точками.

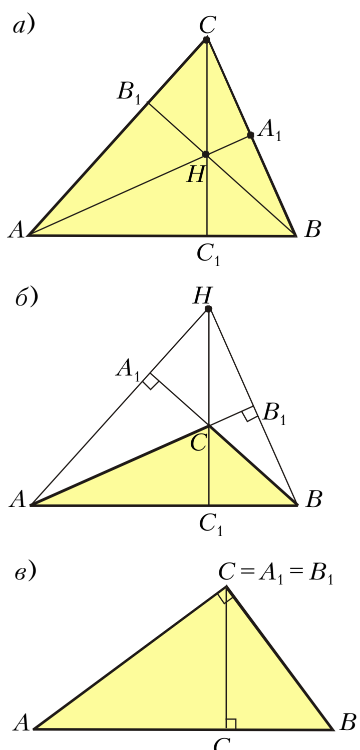

Рис. 3

Вспомогательная окружность

В дальнейшем будут использованы стандартные обозначения для сторон и углов треугольника: $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$. Через R мы будем обозначать радиус описанной окружности, а через O — ее центр.

Начнем с задачи.

Задача. *Докажите, что треугольники A_1B_1C и ABC подобны.*

Рассмотрим сначала остроугольный треугольник ABC. Поскольку углы AA_1B и BB_1A — прямые, точки A, B_1, A_1 и B лежат на окружности с диаметром AB (рис.4,*а*). Поэтому $\angle B_1A_1B = \pi - \alpha$. Но это значит, что $\angle CA_1B_1 = \alpha$, и треугольники A_1B_1C и ABC подобны по третьему признаку подобия. Если же ABC тупоугольный

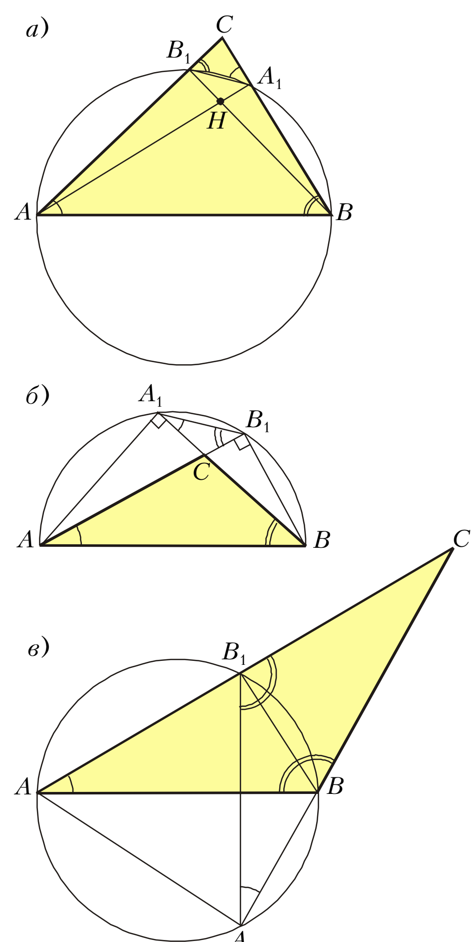

Рис. 4

и $\gamma > \pi/2$ (рис.4,*б*), то точки A_1, B_1, B, A лежат на одной окружности, а углы A_1B_1A и ABA_1 равны как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу.

Если C — острый, а B — тупой угол, то B_1BA_1A — вписанный четырехугольник (рис.4,*в*) и $\angle BA_1B_1 = \angle A$, что доказывает утверждение задачи и в этом случае.

Во всех трех случаях при доказательстве равенства углов была использована окружность, содержащая 4 точки интересующей нас конфигурации. Дальше этот прием будет применяться неоднократно.

Отметим еще, что коэффициент подобия треугольников ABC и A_1B_1C равен

$$k = \frac{B_1C}{BC} = \cos\gamma, \text{ если } \gamma < \pi/2,$$

и

$$k = |\cos\gamma|, \text{ если } \gamma > \pi/2.$$

Упражнения

2. Найдите сторону AB треугольника ABC, если $A_1B_1 = l$, а $\angle C = \gamma$.

3. Найдите угол C треугольника ABC, если отрезок A_1B_1 а) равен R, где R — радиус описанной около него окружности; б) равен $\frac{1}{2}R$. в) В каких пределах может меняться отношение $\frac{A_1B_1}{R}$?

4. Докажите, что прямые OC и A_1B_1 перпендикулярны.

5. Пусть R — радиус окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC, а p_1 — полупериметр треугольника $A_1B_1C_1$. Найдите площадь треугольника ABC.

Замечание. Внимательно разглядывая рисунок 4,*а*, нетрудно заметить, что

$$\angle B_1A_1A = \angle B_1BA = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

Аналогично, из рисунка 4,*б*

$$\angle B_1A_1A = \frac{\pi}{2} + \alpha.$$

Эти соотношения нам тоже пригодятся в дальнейшем.

Ортоцентрический треугольник

Ортоцентрическим треугольником для данного треугольника ABC называется треугольник $A_1B_1C_1$, образованный основаниями его высот. Ясно, что если исходный треугольник не является прямоугольным, то ортоцентрический треугольник существует.

Выразим углы ортоцентрического треугольника через углы данного. Сначала сделаем это для остроугольного треугольника. Прежде всего заметим (рис.5,*а*), что, как было ранее доказано, $\angle B_1A_1C = \angle C_1A_1B = \alpha$. Поэтому в ортоцентрическом треугольнике

$$\angle A_1 = \pi - 2\alpha,$$

аналогично,

$$\angle B_1 = \pi - 2\beta, \ \angle C_1 = \pi - 2\gamma.$$

Попутно становится очевидным, что

$$\angle B_1A_1A = \angle C_1A_1A,$$

т.е. что высота AA_1 является биссектрисой угла A_1 ортоцентрического треугольника.

Итак, *высоты остроугольного треугольника являются биссектрисами углов его ортоцентрического треугольника, а ортоцентр H — центром вписанной в $\Delta A_1B_1C_1$ окружности.*

Упражнение 6. Найдите углы остроугольного треугольника, если его ортоцентрический треугольник а) правильный; б) равнобедренный прямоугольный; в) равнобедренный с углом при вершине $2\pi/3$; г) имеет углы α_1, β_1, γ_1.

Теперь найдем углы треугольника $A_1B_1C_1$, если угол C тупой.

Мы уже отметили ранее, что $\angle A_1B_1A = \beta$. Кроме того, в остроугольном треугольнике AHB (рис.5,*б*) AB_1, BA_1, HC_1 — высоты, так что треугольник $A_1B_1C_1$ является ортоцентрическим и для AHB. Мы уже видели, что

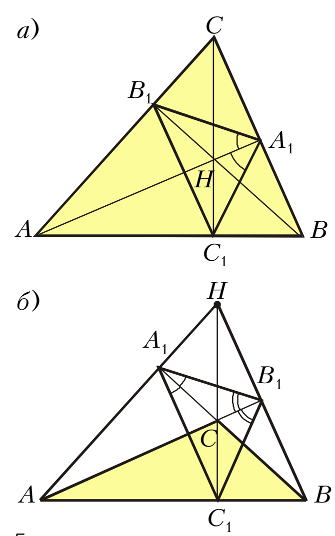

Рис. 5

$\angle A_1B_1A = \beta$, а высота AB_1 — биссектриса угла B_1. Поэтому $\angle B_1 = 2\beta$. Аналогично, $\angle A_1 = 2\alpha$, а $\angle C_1 = 2\gamma - \pi$.

Упражнения

7. Найдите углы тупоугольного треугольника, если его ортоцентрический треугольник а) правильный; б) равнобедренный прямоугольный; в) имеет углы $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$.

8. Найдите углы треугольников, подобных своим ортоцентрическим треугольникам.

9. Сколько существует (с точностью до подобия) треугольников, ортоцентрический треугольник которых неравнобедренный и имеет углы α_1, β_1, γ_1?

10. Вторым ортоцентрическим треугольником для данного треугольника называется ортоцентрический треугольник его ортоцентрического треугольника. Найдите углы треугольника, если его второй ортоцентрический треугольник правильный.

Ортоцентр и описанная окружность

Снова начнем с остроугольного треугольника ABC. Пусть H — его ортоцентр. Опишем около ΔABC окружность. Пусть H_1, H_2, H_3 — точки пересечения продолжений высот исходного треугольника с описанной окружностью (рис.6).

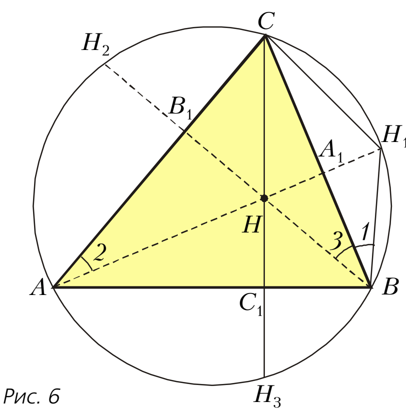

Рис. 6

Поскольку $\angle 1 = \angle 2$ (как вписанные), а $\angle 2 = \angle 3$ (это острые углы двух прямоугольных треугольников с общим углом C), получаем, что $\angle 1 = \angle 3$, а треугольник HBH_1 равнобедренный, так как его высота BA_1 является биссектрисой. Следовательно, $HA_1 = A_1H_1$, т.е.

точка, симметричная ортоцентру относительно стороны, лежит на описанной окружности. (∗)

А так как треугольники CHB и CH_1B равны, радиус окружности, описанной около треугольника CHB, равен R. Итак, на рисунке 7 радиусы всех четырех окружностей равны. Заметим попутно, что треугольники $H_1H_2H_3$ и $A_1B_1C_1$ подобны с коэффициентом 2. Поэтому радиус окружности, описанной около ортоцентрического треугольника, равен $R/2$.

Если треугольник ABC тупоугольный, то $A_1B_1C_1$ является ортоцентри-

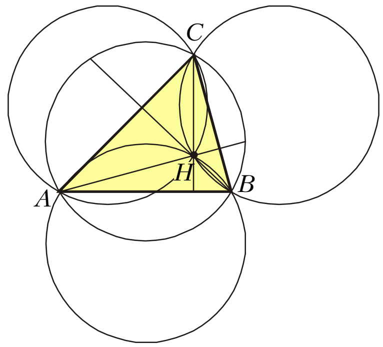

Рис. 7

ческим треугольником и для треугольника AHB и, по только что доказанному, радиус его описанной окружности тоже равен $R/2$.

Утверждение (*), доказанное для остроугольных треугольников, справедливо и для тупоугольных треугольников. В самом деле (рис.8), опишем окружность около остроугольного треугольника AHB. Мы уже доказали,

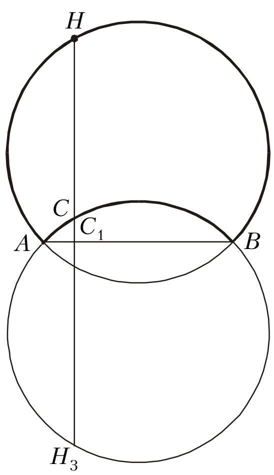

Рис. 8

что окружности ACB, AHB, HCB и ACH имеют одинаковые радиусы. Поэтому, например, окружности ACB и AHB симметричны относительно прямой AB. Но это и значит, что при симметрии относительно AB точка H_3, симметричная точке H, оказывается на окружности ABC. Аналогично рассуждаем и о точках H_1 и H_2.

Упражнение 11. Докажите, что окружность, описанная около треугольника $A_1B_1C_1$, проходит через середины сторон треугольника ABC и через середины отрезков AH, BH и CH, соединяющих его ортоцентр с вершинами. (Эта окружность называется *окружностью девяти точек*.)

Экстремальное свойство

Будем говорить, что треугольник KLM вписан в треугольник ABC, если его вершины K, L, M лежат на сторонах AB, BC и CA соответственно.

Теорема. *Из всех треугольников KLM минимальный периметр имеет ортоцентрический треугольник.*

Интересно отметить, что если треугольник ABC тупоугольный или прямоугольный, то вписанного в него треугольника минимального периметра не существует (он вырождается в высоту, опущенную из вершины наибольшего угла).

Вспомогательная задача. *Пусть дан острый угол ACB с вершиной C и точка M внутри него. Найдите на сторонах AC и CB точки K и L так, чтобы треугольник KLM имел минимальный периметр.*

Построим точки M' и M'', симметричные точке M относительно сторон AC и BC, и рассмотрим ломаную $M''LKM'$ (рис.9). Ее длина равна периметру треугольника KLM. Ясно,

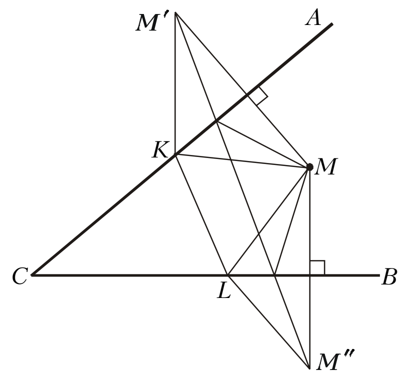

Рис. 9

что длина отрезка $M'M''$ не больше длины этой ломаной и совпадает с ней только тогда, когда точки K и L совпадают с точками пересечения отрезка $M'M''$ со сторонами угла. Задача решена.

Упражнение 12. Докажите, что такие точки K и L существуют, т.е. что отрезок $M'M''$ пересекает лучи CA и CB.

Теперь приступим к доказательству теоремы.

Возьмем на стороне AB треугольника ABC точку M. Отразим точку M относительно сторон AC и BC и соединим точки M' и M'' (рис.10).

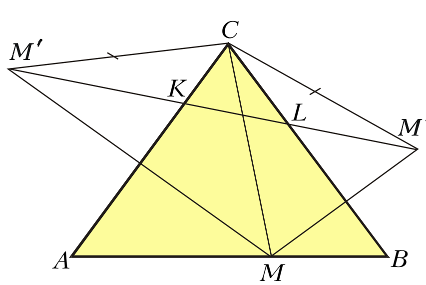

Рис. 10

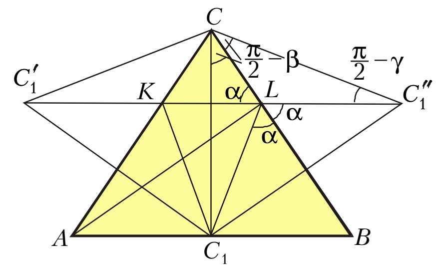

Рис. 11

Мы уже знаем, что периметр треугольника KLM меньше периметра любого треугольника с вершиной в точке M, вписанного в треугольник ABC. Осталось найти точку M так, чтобы периметр KLM был минимальным. Заметим, что треугольник $M''CM'$ равнобедренный, а $\angle M''CM' = 2\gamma$ – постоянный угол. Поэтому периметр ΔKLM минимален, если минимален отрезок $M'M''$. Но отрезок $M'M''$ минимален, когда минимальна сторона $M'C$. Поскольку $M'C = MC$, искомый минимум достигается, когда MC — высота треугольника ABC, т.е. когда $M = C_1$ (рис. 11).

Рассмотрим теперь треугольник C_1KL и докажем, что $L = A_1$. Но это просто. В самом деле, $\angle C_1'CC_1'' = 2\gamma$. Поэтому

$$\angle CC_1''L = \frac{\pi}{2} - \gamma,$$

$$\angle C_1''CL = \angle BCC_1 = \frac{\pi}{2} - \beta,$$

$$\angle CLK = \frac{\pi}{2} - \gamma + \frac{\pi}{2} - \beta = \pi - (\gamma + \beta) = \alpha,$$

$$\angle C_1LB = \angle C_1''LB = \angle CLK = \alpha.$$

Но тогда $\angle CLC_1 = \pi - \alpha$ и четырехугольник CLC_1A вписанный (снова вспомогательная окружность!). Поэтому

$$\angle CLA = \angle CC_1A = \frac{\pi}{2}.$$

Мы могли бы рассуждать и иначе. Предположим, что точка L не есть основание высоты AA_1. Тогда треугольник, построенный в соответствии с вспомогательной задачей, имеет периметр, меньший периметра треугольника C_1KL, что невозможно.

Итак, K и L – основания высот треугольника ABC. А это и значит, что $L = A_1$. Аналогично, $K = B_1$.

Тем самым экстремальное свойство треугольника $A_1B_1C_1$ доказано.