«Квант» для младших школьников

Задачи

(см. «Квант» №3)

1. Докажем, что профессору Мумбуму Плюмбуму не удастся составить из 8 различных цифр число, которое делилось бы на каждую из этих цифр. Очевидно, среди цифр не должно быть цифры 0. Кроме того, среди них обязательно должны присутствовать четные цифры, поэтому искомое восьмизначное число должно быть четным. В таком случае оно не должно делиться на цифру 5 (иначе это число должно было бы оканчиваться на цифру 0). Итак, в искомое число могут входить только цифры 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, и, следовательно, оно должно делиться на 9. Но сумма выписанных цифр не делится на 9.

Пример семизначного числа, делящегося на любую из его цифр: 1289736.

2. Если квадрат имеет нечетную сторону, то в нем клеток одного цвета на 1 больше количества клеток другого цвета. Пусть отмечено N квадратов с центральной белой клеткой (назовем их центрально-белыми) и M квадратов с центральной черной клеткой (назовем их центрально-черными). У центрально-белых квадратов суммарное количество белых клеток на N больше суммарного количества черных клеток; у центрально-черных квадратов суммарное количество черных клеток на M больше суммарного количества белых клеток. Поскольку изначально количества черных и белых клеток равны, то $M = N$. Таким образом, белых и черных клеток отмечено поровну.

3. Очевидно, при маленьком радиусе колеса оно будет катиться по бордюру, и длина следа будет не нулевой. Найдем наибольшее значение радиуса колеса R, при котором еще возможно касание колеса в вершине бордюра – правильного треугольника с длиной стороны a (рис.1).

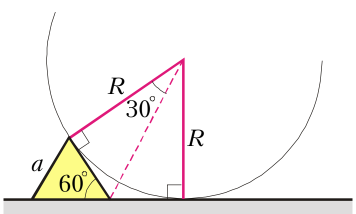

Рис. 1

Из соотношения $\frac{a}{R} = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$ получаем $R = a\sqrt{3}$. Колесо будет поворачиваться вокруг вершины бордюра, оставляя нулевую длину следа, если только его радиус превышает величину $a\sqrt{3}$. Для значения $a = 20$ см имеем $a\sqrt{3} > 20 \cdot 1{,}7 = 34$ см, поэтому колесо с радиусом 30 см обязательно оставит на бордюре след.

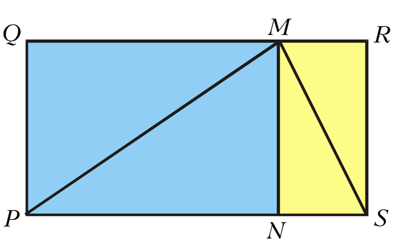

Рис. 2

4. Воспользуемся следующим вспомогательным утверждением: если на стороне QR прямоугольника $PQRS$ выбрана точка M, то площадь треугольника PMS равна половине площади прямоугольника $PQRS$. Для доказательства достаточно опустить высоту MN и рассмотреть площади треугольников PQM; PMN и MNS; MRS (рис.2).

Для доказательства основного утверждения задачи заметим, что площадь четырехугольника $CBDA$ (рис.3), с одной стороны, равна половине площади красного прямоугольника, а с другой стороны – половине площади синего прямоугольника.

5. Может показаться, что данных недостаточно – ведь первый собеседник не договорил, какой именно год он имеет в виду. И тем не менее задача решается: ведь он успел сказать главное – что получается *какой-то год*, а следовательно – *целое число*. Таким образом, если год его рождения обозначить через x, то из условия следует, что $\frac{(x+43)(x+45)}{x}$ – целое. Но

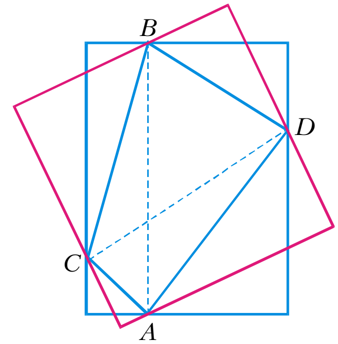

Рис. 3

$$\frac{(x+43)(x+45)}{x} = \frac{x^2+88x+1935}{x} = x+88+\frac{1935}{x},$$

т.е. 1935 делится на x. Отсюда $x = 1935$ (меньшие значения, очевидно, не подходят).

Таким образом, первый собеседник родился в 1935 году. Тогда 43 года ему исполнилось в 1978 году, 45 – в 1980 году, а тот год, о котором он не успел ничего сказать – это $1978 \times 1980/1935 = 2024$. Правда, этот год еще не наступил, но в условии это и не требуется. Он, например, мог сказать так: «...когда наступит сорокалетие моего внука» или еще что-нибудь.

Конкурс «Математика 6—8»

(см. «Квант» №1)

16. Поскольку из двух наклонных больше та, у которой проекция больше, то из неравенств условия задачи выводятся такие следствия:

$$DP \ge PA \Rightarrow OD \ge OA;$$

$$AQ \ge QB \Rightarrow OA \ge OB;$$

$$BR \ge RC \Rightarrow OB \ge OC;$$

$$CS \ge SD \Rightarrow OC \ge OD.$$

Отсюда

$$OD \ge OA \ge OB \ge OC \ge OD,$$

или

$$OD = OA = OB = OC = OD.$$

Значит, точка O – центр описанной около четырехугольника $ABCD$ окружности.

17. Такого натурального числа не существует. Для любого натурального n член этой последовательности $\left(n^2+3n+3\right)n+1$ является кубом числа $n + 1$.

18. Пусть каждому медвежонку в конечном итоге досталось m граммов сыра. Так как после каждого откусывания масса куска уменьшается в 2 раза, то лиса не могла от каждого куска откусить одинаковое число раз (по 5), так как в этом случае начальные массы кусков также были бы равны, что противоречит условию. Поэтому пусть от первого куска лиса откусила n раз ($0 \le n \le 4$), а от второго – остальные $10 - n$ раз. Тогда первоначальные массы кусков были равны $m \cdot 2^n$ и $m \cdot 2^{10-n}$.

Допустим, медвежата правы, и уравнять массу частей можно за k откусываний, где $1 \le k \le 3$. Так как $n \le 4$, то масса первого куска меньше, чем второго, и для уравнивания надо от второго куска откусить больше раз, чем от первого, т.е. больше $k/2$ раз. Итак, пусть от второго куска при уравнивании надо откусить p раз, причем $k/2 < p \le k \le 3$. Тогда от пер-