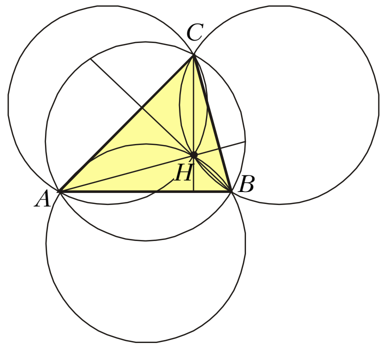

Рис. 7

ческим треугольником и для треугольника AHB и, по только что доказанному, радиус его описанной окружности тоже равен $R/2$.

Утверждение $(*)$, доказанное для остроугольных треугольников, справедливо и для тупоугольных треугольников. В самом деле (рис.8), опишем окружность около остроугольного треугольника AHB. Мы уже доказали,

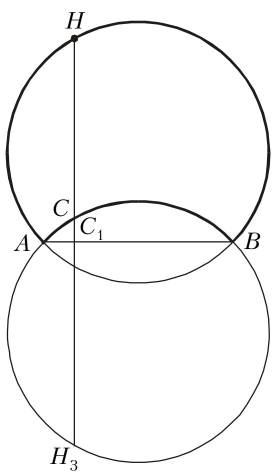

Рис. 8

что окружности ACB, AHB, HCB и ACH имеют одинаковые радиусы. Поэтому, например, окружности ACB и AHB симметричны относительно прямой AB. Но это и значит, что при симметрии относительно AB точка H_3, симметричная точке H, оказывается на окружности ABC. Аналогично рассуждаем и о точках H_1 и H_2.

Упражнение 11. Докажите, что окружность, описанная около треугольника $A_1B_1C_1$, проходит через середины сторон треугольника ABC и через середины отрезков AH, BH и CH, соединяющих его ортоцентр с вершинами. (Эта окружность называется *окружностью девяти точек*.)

Экстремальное свойство

Будем говорить, что треугольник KLM вписан в треугольник ABC, если его вершины K, L, M лежат на сторонах AB, BC и CA соответственно.

Теорема. *Из всех треугольников KLM минимальный периметр имеет ортоцентрический треугольник.*

Интересно отметить, что если треугольник ABC тупоугольный или прямоугольный, то вписанного в него треугольника минимального периметра не существует (он вырождается в высоту, опущенную из вершины наибольшего угла).

Вспомогательная задача. *Пусть дан острый угол ACB с вершиной C и точка M внутри него. Найдите на сторонах AC и CB точки K и L так, чтобы треугольник KLM имел минимальный периметр.*

Построим точки M' и M'', симметричные точке M относительно сторон AC и BC, и рассмотрим ломаную $M''LKM'$ (рис.9). Ее длина равна периметру треугольника KLM. Ясно,

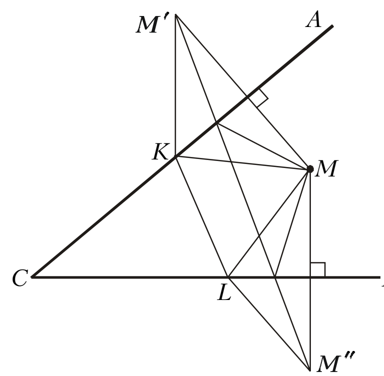

Рис. 9

что длина отрезка $M'M''$ не больше длины этой ломаной и совпадает с ней только тогда, когда точки K и L совпадают с точками пересечения отрезка $M'M''$ со сторонами угла. Задача решена.

Упражнение 12. Докажите, что такие точки K и L существуют, т.е. что отрезок $M'M''$ пересекает лучи CA и CB.

Теперь приступим к доказательству теоремы.

Возьмем на стороне AB треугольника ABC точку M. Отразим точку M относительно сторон AC и BC и соединим точки M' и M'' (рис.10).

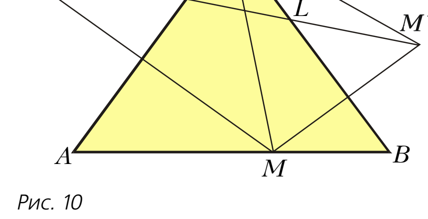

Рис. 10

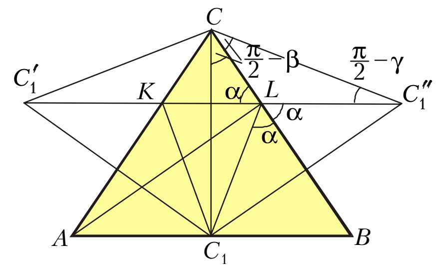

Рис. 11

Мы уже знаем, что периметр треугольника KLM меньше периметра любого треугольника с вершиной в точке M, вписанного в треугольник ABC. Осталось найти точку M так, чтобы периметр KLM был минимальным. Заметим, что треугольник $M''CM'$ равнобедренный, а $\angle M''CM' = 2\gamma$ – постоянный угол. Поэтому периметр ΔKLM минимален, если минимален отрезок $M'M''$. Но отрезок $M'M''$ минимален, когда минимальна сторона $M'C$. Поскольку $M'C = MC$, искомый минимум достигается, когда MC — высота треугольника ABC, т.е. когда $M = C_1$ (рис. 11).

Рассмотрим теперь треугольник C_1KL и докажем, что $L = A_1$. Но это просто. В самом деле, $\angle C_1'CC_1'' = 2\gamma$. Поэтому

$$\angle CC_1''L = \frac{\pi}{2} - \gamma,$$

$$\angle C_1''CL = \angle BCC_1 = \frac{\pi}{2} - \beta,$$

$$\angle CLK = \frac{\pi}{2} - \gamma + \frac{\pi}{2} - \beta = \\ = \pi - (\gamma + \beta) = \alpha,$$

$$\angle C_1LB = \angle C_1''LB = \angle CLK = \alpha.$$

Но тогда $\angle CLC_1 = \pi - \alpha$ и четырехугольник CLC_1A вписанный (снова вспомогательная окружность!). Поэтому

$$\angle CLA = \angle CC_1A = \frac{\pi}{2}.$$

Мы могли бы рассуждать и иначе. Предположим, что точка L не есть основание высоты AA_1. Тогда треугольник, построенный в соответствии с вспомогательной задачей, имеет периметр, меньший периметра треугольника C_1KL, что невозможно.

Итак, K и L – основания высот треугольника ABC. А это и значит, что $L = A_1$. Аналогично, $K = B_1$.

Тем самым экстремальное свойство треугольника $A_1B_1C_1$ доказано.