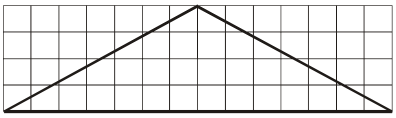

Рис. 20

Можно, конечно, и удвоить, а то уж очень низенький получился.

Остроугольный неравнобедренный треугольник с углами 45°, 60° и 75° можно «склеить» из двух прямоугольных треугольников, углы одного из которых равны 45° и 45°, а второго – 60° и 30°. С первым проблем нет, а второй мы уже строили. Значит, ответ готов: треугольник с высотой 7 клеток и основанием $7+4=11$ клеток (рис.21), или вдвое больший.

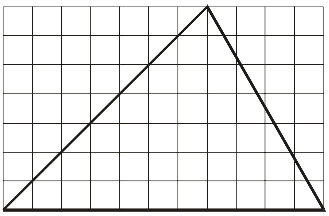

Рис. 21

Наконец, наипроизвольнейший тупоугольный неравнобедренный треугольник (с углами 22,5°, 45° и 112,5°) можно «склеить» из двух прямоугольных треугольников, один из которых – равнобедренный прямоугольный, а второй имеет углы 22,5° и 67,5°. Тангенс угла 67,5° мы уже раскладывали

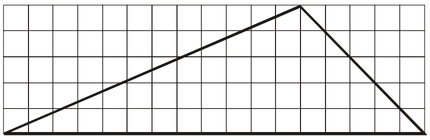

Рис. 22

в цепную дробь. Приближение $\operatorname{tg} 67{,}5^\circ \approx \frac{12}{5}$ дает треугольник с высотой 5 клеток и основанием 12 + 5 = 17 клеток (рис.22).

Еще несколько наипроизвольнейших треугольников

При поиске наипроизвольнейшего прямоугольного треугольника мы рассматривали величину $\min\left(\alpha,\ 90^\circ - 2\alpha\right)$. Но вместо нее можно было рассмотреть сумму квадратов

$$\alpha^2 + \left(90^\circ - 2\alpha\right)^2.$$

Квадратный трехчлен

$$5\alpha^2 - 360^\circ\alpha + 8100^{\circ\circ}$$

(уж простите меня за дважды нарисованный кружочек у 8100 – почему-то нет общепринятого обозначения для квадратных градусов; для квадратных метров обозначение есть, а для квадратных градусов – нет!) принимает свое наименьшее значение при $\alpha = \frac{360^\circ}{2\cdot 5} = 36^\circ$. Вот вам и еще один самый произвольный прямоугольный треугольник! (Восторгов поубавится, когда вы вспомните, что величину $\min\left(\alpha,\ 90^\circ - 2\alpha\right)$ мы старались сделать максимально большой – а для суммы квадратов $\alpha^2 + \left(90^\circ - 2\alpha\right)^2$ почему-то искали вовсе не наибольшее, а наименьшее значение!)

Аналогично, при поиске наипроизвольнейшего равнобедренного треугольника можно было рассмотреть сумму квадратов

$$(\beta - \alpha)^2 + \alpha^2 = \left(180^\circ - 3\alpha\right)^2 + \alpha^2.$$

Квадратный трехчлен

$$10\alpha^2 - 6\cdot 180^\circ\alpha + 32400^{\circ\circ}$$

принимает наименьшее значение при

$$\alpha = \frac{6\cdot 180^\circ}{2\cdot 10} = 54^\circ.$$

Помните, был такой треугольник?

Когда эта статья готовилась к печати, в редакции мне показали письмо В.Б.Дроздова (Рязань). Он предложил свой критерий. Но лучше не буду пересказывать его письмо, а приведу длинную цитату: «Этот сюжет возник у меня при подготовке рисунка к одной моей статье. Один раз нарисованный мною произвольный треугольник непроизвольно оказался почти что равнобедренным, другой раз – весьма близким к прямоугольному.

Поскольку форма треугольника определяется его углами α и β (третий угол $\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$), то найдем углы треугольника, который максимально отличается от двух названных частных случаев, а также от вырожденного варианта – отрезка. Не умаляя общности, считаем $\alpha < \beta < \gamma$. Начну с остроугольного треугольника. Конечно, мой критерий вряд ли может претендовать на единственность, но он будет достаточно разумен: я введу функцию углов

$$F = \alpha(\beta - \alpha)(\gamma - \beta)(90 - \gamma) =$$

$$= \alpha(\beta - \alpha)(180 - \alpha - 2\beta)(\alpha + \beta - 90)$$

и буду искать такой треугольник, для которого F принимает наибольшее значение».

Затем автор письма объясняет, что функция F интересует его не при любых α и β, а только при тех, которые изображаются точками треугольника KLN (см. рис.14). Далее он пишет: «Определить наибольшее значение функции двух переменных можно по аналогии с функцией одной переменной. В самом деле, мысленно зафиксируем β. Тогда функция F станет функцией одной переменной α. Находим ее производную (такую производную называют частной производной от функции $F(\alpha, \beta)$ по α) и приравниваем к нулю. Затем делаем то же самое, фиксируя α и дифференцируя по β. Произведение четырех множителей удобно дифференцировать по формуле

$$\left(u_1u_2u_3u_4\right)' =$$

$$= u_1u_2u_3u_4\cdot\left(\frac{u_1'}{u_1} + \frac{u_2'}{u_2} + \frac{u_3'}{u_3} + \frac{u_4'}{u_4}\right).$$

Таким образом, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} F(\alpha,\beta)\cdot\left(\dfrac{1}{\alpha} - \dfrac{1}{\beta-\alpha} - \dfrac{1}{180-\alpha-2\beta} + \right. \\ \qquad\qquad \left. + \dfrac{1}{\alpha+\beta-90}\right) = 0, \\ F(\alpha,\beta)\cdot\left(\dfrac{0}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta-\alpha} - \dfrac{2}{180-\alpha-2\beta} + \right. \\ \qquad\qquad \left. + \dfrac{1}{\alpha+\beta-90}\right) = 0, \end{cases}$$

которая сводится к системе двух уравнений второй степени с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 + 3\alpha\beta - 270\alpha + 90\beta = 0, \\ 3\alpha^2 - \beta^2 + \alpha\beta - 225\alpha + 90\beta = 0. \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое, получаем $\beta = \alpha + 22{,}5$. Подставив в первое уравнение, приходим к квадратному уравнению

$$4\alpha^2 - 210\alpha + 2025 = 0,$$

откуда

$$\alpha = \frac{105 \pm 15\sqrt{13}}{4}.$$

Подходит лишь корень, соответствующий знаку плюс, ибо другой корень вместе со значением $\beta = \alpha + 22{,}5^\circ$ дает точку, лежащую вне треугольника KLN. Приближенные значения искомых углов таковы: $\alpha \approx 39{,}77^\circ$; $\beta \approx 62{,}27^\circ$; $\gamma \approx 77{,}96^\circ$.

Для тупоугольного треугольника решение в общем похоже на вышеизложенное, поэтому укажу только ключевые моменты. Функция

$$F = \alpha(\beta - \alpha)(90 - \beta)(\gamma - 90)$$