и, наконец, график $y = \min\left(x, 90-\frac{3}{2}x, \frac{x}{2}, 90-x\right)$, увидим, что максимум достигается при $x = 45$. Получается, что самый произвольный непрямоугольный равнобедренный треугольник, угол при вершине которого меньше угла при основании,– это треугольник с углами 67,5°, 67,5° и 45° (рис.9).

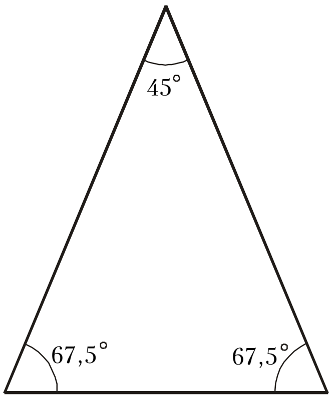

Рис. 9

Какой из треугольников, изображенных на рисунках 8 и 9, милее вашему сердцу? Мне чуть больше нравится второй, поскольку он сильнее отличается от прямоугольного. Впрочем, возможны какие-то другие постановки интересовавшей нас в этом разделе задачи, так что не буду навязывать вам этот треугольник, а еще раз скажу: в конечном счете все зависит от выбранного критерия!

Угол при вершине больше угла при основании. Напомню, что здесь мы ищем «самый произвольный» остроугольный равнобедренный треугольник, у которого угол при вершине больше угла при основании, т.е. $90^\circ > 180^\circ - 2\alpha > \alpha$, или $45^\circ < \alpha < 60^\circ$. Если рассмотреть

$$\max_{\substack{45^\circ<\alpha<60^\circ \\ \beta=180^\circ-2\alpha}} (\beta-\alpha),$$

то ничего интересного не увидим – максимум не достигается, поскольку точка $\alpha = 45^\circ$ не входит в рассматриваемый интервал. А вот если рассмотреть

$$\max_{\substack{45^\circ<\beta<60^\circ \\ \alpha=\left(180^\circ-\beta\right)/2}} \min\left(\beta, \beta-\alpha, 90^\circ-\alpha, 90^\circ-\beta\right),$$

то получим ответ: максимум достигается при $\alpha = 54^\circ$, $\beta = 72^\circ$ (рис.10). (Проверьте!)

Неравнобедренный треугольник

Обозначим величины углов буквами α, β, γ. Пусть для определенности

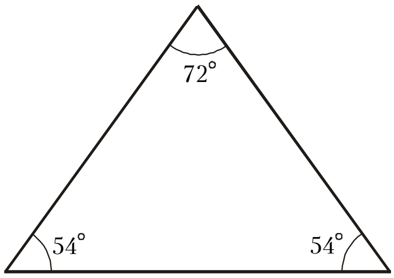

Рис. 10

$0^\circ < \alpha \le \beta \le \gamma < 180^\circ$. Рассмотрим сначала задачу о том, насколько большой может быть величина $\min(\beta-\alpha, \gamma-\beta)$. Очевидно, если уменьшать α, одновременно увеличивая γ и не меняя β, то обе разности $\beta-\alpha$ и $\gamma-\beta$ будут увеличиваться. Поэтому достаточно рассмотреть два крайних случая: $\alpha = 0^\circ$ и $\gamma = 180^\circ$. (Конечно, ни треугольника с нулевым углом, ни треугольника с развернутым углом не существует. Но ничего не поделаешь – уж если выбрали функцию $\min(\beta-\alpha, \gamma-\beta)$, то надо анализировать эти два крайних случая.)

Второй случай ничего хорошего нам не сулит: поскольку сумма углов треугольника равна 180°, то $\gamma = 180^\circ$ лишь при $\alpha = \beta = 0^\circ$.

А в первом случае $(\alpha = 0^\circ)$ условие $\beta + \gamma = 180^\circ$ сводит задачу к нахождению максимума выражения $\min\left(\beta, 180^\circ - 2\beta\right)$, где $0^\circ < \beta \le 90^\circ$. Очевидно, максимум достигается при $\beta = 60^\circ$, так что на роль самого неравнобедренного треугольника претендует треугольник с углами $\alpha \approx 0^\circ$, $\beta \approx 60^\circ$ и $\gamma \approx 120^\circ$ (рис.11).

Рис. 11

Ответ получен? Нет, есть еще несколько претендентов! Давайте потребуем, чтобы угол α не был слишком маленьким, точнее говоря, вместо $\min(\beta-\alpha, \gamma-\beta)$ постараемся сделать как можно большей величину

$$\Delta = \min(\alpha, \beta-\alpha, \gamma-\beta).$$

Чтобы избавиться от третьей переменной, заменим γ на $180^\circ - \alpha - \beta$. Очевидно,

$$\Delta = \min\left(\alpha, \beta-\alpha, 180^\circ - \alpha - 2\beta\right),$$

условие $\beta \le \gamma$ примет вид $\alpha + 2\beta \le 180^\circ$. На координатной плоскости множество точек $(\alpha; \beta)$, удовлетворяющих последнему неравенству и неравенствам $0 < \alpha \le \beta$, изображается в виде треугольника OKL (рис.12).

Чтобы исследовать величину Δ, сначала выясним, для каких точек $(\alpha; \beta)$

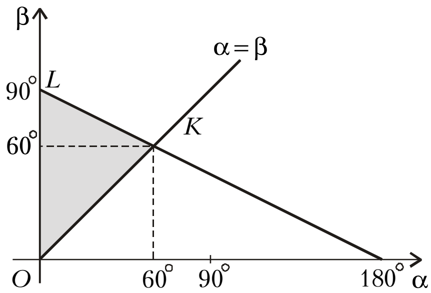

Рис. 12

какое из чисел α, $\beta-\alpha$, $180^\circ - \alpha - 2\beta$ минимально. Для этого воспользуемся чем-то вроде «метода интервалов» – посмотрим, где эти величины равны, т.е. нарисуем прямые, заданные уравнениями $\alpha = \beta - \alpha$, $\beta - \alpha = 180^\circ - \alpha - 2\beta$ и $\alpha = 180^\circ - \alpha - 2\beta$ (рис. 13).

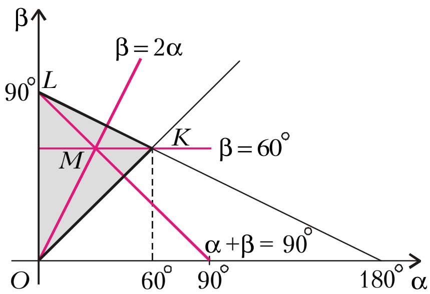

Рис. 13

Они делят треугольник OKL на треугольники OLM, OMK и KLM. Как нетрудно сообразить (проанализировав неравенства или произвольно выбрав в каждом из этих треугольников по точке), в треугольнике OLM из интересующих нас трех чисел α, $\beta-\alpha$, $180^\circ - \alpha - 2\beta$ самым маленьким является α. В треугольнике OMK таковым является $\beta - \alpha$, а в KLM, разумеется, это $180^\circ - \alpha - 2\beta$.

Теперь легко понять, что максимальное значение Δ принимает в точке $M\left(30^\circ; 60^\circ\right)$. На роль «самого неравнобедренного» треугольника претендует (как помните, тоже самый произвольный) прямоугольный треугольник! Хорошо ли это? В некоторых случаях, наверное, хорошо. Но чаще всего – плохо! Поэтому постараемся, чтобы треугольник не был прямоугольным.

Неравнобедренный непрямоугольный треугольник. Поскольку α всегда не превосходит 60° и, тем самым, не менее чем на 30° отличается от 90°, то за «непрямоугольность» отвечают величины $90^\circ - \beta$ и $\left|90^\circ - \gamma\right| = \left|\alpha + \beta - 90^\circ\right|$. Значит, нам нужно максимизировать величину

$$\Delta = \min\left(\alpha, \beta-\alpha, 180^\circ - \alpha - 2\beta, 90^\circ - \beta, \left|\alpha + \beta - 90^\circ\right|\right),$$