

рых изменение исследуемой величины пропорционально ее текущему значению, например для распада радиоактивных атомов, размножения микробов или роста народонаселения Земли по Мальтусу. Его решение имеет вид

$$\ln \frac{v_0}{v} \sim \frac{\pi r^2 \rho_{\text{п}}}{m} (y - 0) = \frac{y}{l}, \quad (2)$$

где v_0 – начальное значение скорости шарика (при $y = 0$), $l = \frac{m}{\pi r^2 \rho_{\text{п}}}$ – характерная длина. Так, для стального шарика радиусом $r = 1$ см и массой $m = 4\pi r_{\text{ст}}^3 / 3 \approx 30$ г (где $\rho_{\text{ст}} = 7,8$ г/см³ – плотность стали) эта длина имеет порядок

$$l \approx \frac{3 \cdot 10^{-2} \text{ кг}}{\pi \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 \cdot 1,6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3} \approx 6,5 \text{ см}$$

(среднеобъемная плотность песков лежит в диапазоне 1,5–1,7 г/см³; мы приняли $\rho_{\text{п}} = 1,6$ г/см³). Это уже определенный намек на глубину проникновения: на этом характерном расстоянии скорость убывает в $e = 2,7$ раза. Но при этом, согласно полученной формуле, шарик нигде не остановится – просто он будет двигаться по мере углубления все медленнее и медленнее. (Конечно, это лишь оценка l по порядку величины: ведь в выражение для силы сопротивления нужно было бы внести еще безразмерный множитель, который называется коэффициентом сопротивления шарика при его движении в песке. Но кто его знает?)

Однако вспомним, что, с другой стороны, песок не совсем жидкость, и этот факт как-то связан с наличием предельного угла α_* . Можно ожидать, что по достижении некоторого значения скорости v_* шарик резко затормозится: в этот момент силы сцепления между песчинками начнут играть преобладающую роль по сравнению ... С чем? Возможно, ответ заключается в сравнении характерной величины касательной составляющей ускорения a_{τ} песчинок на экваторе шарика с величиной ускорения, «скатывающегося» песчинки с поверхности песчаной горки. Сделаем оценки. Скорость песка на экваторе возрастает на $\Delta v_{\tau} = \frac{v}{2}$ по сравнению с ее значением в «невозмущенном потоке». Тогда «среднее» приращение скорости будет порядка $\langle \Delta v_{\tau} \rangle = \frac{1}{2} \frac{v}{2}$. И происходит это на «характерном перемещении» порядка радиуса шарика r за харак-

терное время $\langle \Delta t \rangle \sim r / \left(\frac{1}{2} \left(v + \frac{3v}{2} \right) \right)$. Следовательно, $a_{\tau} = \frac{\langle \Delta v_{\tau} \rangle}{\langle \Delta t \rangle} \sim \frac{5}{16} \frac{v^2}{r}$.

Приравняем это ускорение к предельному значению скатывающегося ускорения $g \cos \alpha_*$. Отсюда найдем

$$v^2 \sim \pi r g \cos \alpha_*.$$

Теперь, подставляя эту конечную скорость в выражение (2), для глубины проникновения получим выражение

$$y_* \sim \frac{m}{2\pi r^2 \rho_{\text{п}}} \ln \frac{v_0^2}{\pi r g \cos \alpha_*} \approx \frac{2}{3} \frac{\rho_{\text{ст}}}{\rho_{\text{п}}} r \ln \frac{2h}{\pi r \cos \alpha_*}. \quad (3)$$

Видно, что y_* растет с увеличением предельного угла α_* . Это понятно: ведь чем больше α_* , тем более среда «сыпучая», а в пределе $\alpha_* \rightarrow \pi/2$ она переходит в жидкость, и тогда стальной шарик может сколько угодно тонуть, например в воде. Но не в ртуть – ибо в этом случае нужно учесть и силу Архимеда, которую мы пока что не принимали во внимание (аналогичная ситуация возникнет, если в воду бросить деревянный шарик). Как уже было сказано, если песок потрясти, то его конус будет расплываться, песок все более будет похож на жидкость. В результате в «потрясенном» песке глубина проникновения упавшего шарика должна быть больше. А деревянный шарик или шарик для пинг-понга в сотрясаемом песке будут «всплывать» – это можно проверить в порядке лабораторной работы.

Далее, в выражении (3) мы приняли, что скорость падения шарика с высоты h равна $v_0 = \sqrt{2gh}$, т.е. пренебрегли сопротивлением воздуха – это для того, чтобы поскорее ответить на вопрос, поставленный в самом начале. Конечно, этот результат можно уточнить, учитывая силу сопротивления воздуха. Очевидно, что при этом $v_0^2 < 2gh$. Но полученная формула (3) содержит логарифмическую зависимость от начальной скорости; это настолько слабая зависимость, что физики в шутку называют эту функцию константой. Поэтому такое уточнение несущественно.

Интересно отметить также, что выражение (3) не содержит зависимости от ускорения тяготения. Значит, на Луне глубина проникновения будет та же, что и на Земле: был бы песок одинаков.

Итак, полагая в выражении (3) $h = 100$ м, $\cos \alpha_* = \cos 60^\circ = 1/2$, $r =$

$= 10^{-2}$ м, получим $y_* \sim 0,3$ м. Учитывая множество принятых предположений, осторожный физик сказал бы, что это величина порядка дециметра.

Качественный вид изменения скорости с глубиной приведен на рисунке 4,а – сплошная кривая. Показана «ступенька» при y_* , характерная для сыпучих сред. А штриховая кривая изображает случай деревянного шарика того же радиуса, упавшего в воду с той же начальной скоростью v_0 . Его торможение будет происходить быстрее (так как из выражения (1) следует, что

$$\frac{dv}{dt} \sim \frac{\rho_{\text{воды}}}{\rho_{\text{дерева}}} = \frac{10^3}{0,5 \cdot 10^3} = 2 > \frac{\rho_{\text{п}}}{\rho_{\text{ст}}} \approx \frac{1}{5},$$

а при y_A движение на мгновение прекратится, и шарик начнет всплывать

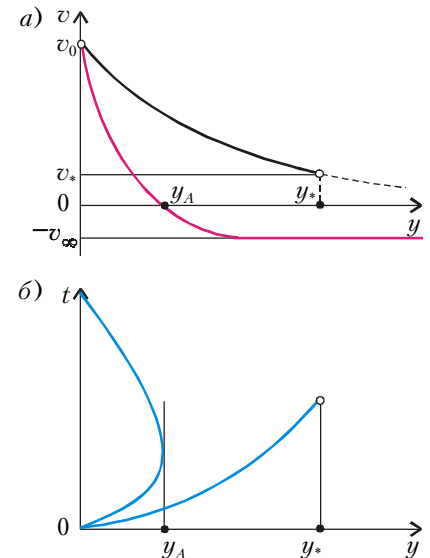


Рис. 4

(скорость изменит знак). Если глубина его проникновения достаточно велика, то на обратном пути вверх будет достигнута постоянная скорость всплывания $-v_{\infty}$, при которой сравниваются силы сопротивления, тяжести и Архимеда.

На рисунке 4,б показан соответствующий вид зависимостей глубины от времени.

Артиллеристы издавна живо интересовались глубиной проникновения в различные среды снарядов разной массы, формы, начальной скорости (в момент удара). В результате они получали эмпирические зависимости, осредненные по различным ситуациям. Эти формулы дают – например, для интересующего нас песка – меньшие значения глубины проникновения, чем полученные нами. И понятно, почему. Ведь мы не учли очень многое. А именно: дополнительные потери энер-