Зачем Галилею песочница

А.СТАСЕНКО

Жара. Пляж. Дети строят из сырого песка башни и за́мки. Мальчик меланхолично роняет стальной шарик в горку горячего песка. Спрашивает: «А на какую глубину уйдет шарик, если его уронить с высоты сто метров?». И действительно, сто́ит подумать, как шарик движется в песке.

Первая стадия падения очевидна: песок при ударе взметается вверх и в стороны – образуется кратер. А что там, внутри песка, на глубинах, много больших размера шарика?

В какой-то мере песок похож на жидкость. О нем можно сказать, что он струится, течет – ведь есть же, например, песочные часы (в принципе такие же, как и водяные). Но есть и важное отличие: из жидкости не сделаешь горку, а из сухого песка можно насыпать конус (рис.1). (Насы́пали,

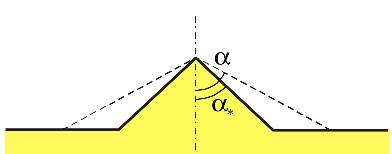

Рис. 1

прикинули на глазок угол при вершине: что-то около $2\alpha_* = 120°$.) Поэтому ясно, что стальной шарик в океане будет монотонно тонуть, а в песке он заведомо остановится на конечной глубине – и этот факт как-то должен быть связан с величиной предельного угла α_*.

На каждую песчинку массой Δm, лежащую «на поверхности» конуса, действует скатывающая составляющая силы тяжести, равная $\Delta mg\cos\alpha$, причем так, что при $\alpha > \alpha_*$ песчинка «не хочет» скатываться, а при $\alpha < \alpha_*$ конус сам собой осыпается, пока не будет достигнуто условие $\alpha = \alpha_*$. Несомненно, это связано с силами взаимодействия между песчинками. Поэтому, если уж песок и считать жидкостью, то это так называемая *неньютоновская* жидкость. Чем она интересна?

Если обычная вязкая (ньютоновская) жидкость при течении в трубе имеет радиальное распределение скоростей, качественно изображенное на рисунке 2,*а*, то для неньютоновской жидкости этот профиль скоростей похож на рисунок 2,*б*, где у стенок трубы имеется неподвижный слой сыпучей среды (см. штриховые линии). И этот слой тем толще, чем больше сила взаимодействия (адгезия) частиц друг с другом и с твердой стенкой. Вот почему так трудно высыпать, например, цемент через трубу – приходится ее трясти, колотить молотком или гаечным ключом. Еще один пример – каждый знает, что́ нужно делать с солонкой или перечницей, если соответствующий материал не желает высыпаться (все это красиво называется *вибрационной реологией*).

Итак, *с одной стороны*, посмотрим на песок как на обычную жидкость. Тогда, если этой «жидкости» приписать среднюю плотность $\rho_п$ (это *не* плотность материала песка, потому что между песчинками существуют воздушные промежутки), то шарик радиусом r при движении со скоростью v (рис.3) будет испытывать силу сопротивления величиной

$$F_{сопр} \sim \rho_п v^2 \pi r^2 .$$

При перемещении на малое расстояние dy эта сила произведет работу, равную $F_{сопр}dy$, и, следовательно, изменит кинетическую энергию на величину

$$md\frac{v^2}{2} \sim -\pi r^2 \rho_п v^2 dy \qquad (1)$$

(ось y и скорость считаем положительными в направлении вниз, силу тяжести шарика mg полагаем много меньшей силы сопротивления). На рисунке 3,*а* искривленными стрелками условно показаны «линии тока» песчинок в неподвижной системе координат, связанной с землей, а на рисунке 3,*б* – в системе координат самого шарика, на который песок набегает с той же (по величине) скоростью v (на «бесконечности»). Отметим, что вид линий тока совершенно различен в этих двух системах координат.

Согласно гидродинамике идеальной несжимаемой жидкости, если эта жидкость натекает на шарик со скоростью v, ее скорость на экваторе будет наибольшей и равной $3v/2$ (из-за сжатий линий тока в экваториальной плоскости). Значит, скорость песка на экваторе шарика в неподвижной системе координат будет равна по величине $v/2$.

Написанное выше дифференциальное соотношение (1) имеет так называемый *релаксационный вид*. Оно типично для многих процессов, в кото-

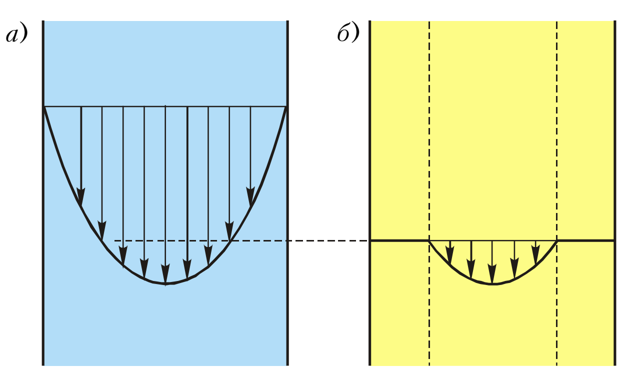

Рис. 2

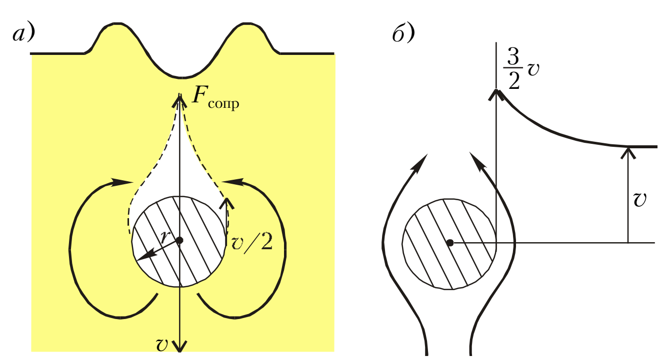

Рис. 3