

Поскольку

$$ab - p(p-c) = ((p-a) + (p-c))((p-b) + (p-c)) - (p-c)((p-a) + (p-b) + (p-c)) = (p-a)(p-b),$$

$$\operatorname{tg}^2(C/2) = r^2/(p-c)^2 = (p-a)(p-b)/p(p-c),$$

а  $p(p-c) < ab$ , выражение  $AL^2 + BL^2 - c^2$  отрицательно, т.е. угол  $ALB$  тупой.

А.Заславский

**M1754\***. Каждое число натурального ряда окрашено либо в черный, либо в белый цвет. Докажите, что найдется бесконечная возрастающая последовательность четных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  такая, что последовательность

$$a_1, \frac{a_1 + a_2}{2}, a_2, \frac{a_2 + a_3}{2}, a_3, \dots, a_n, \frac{a_n + a_{n+1}}{2}, a_{n+1}, \dots$$

одноцветна.

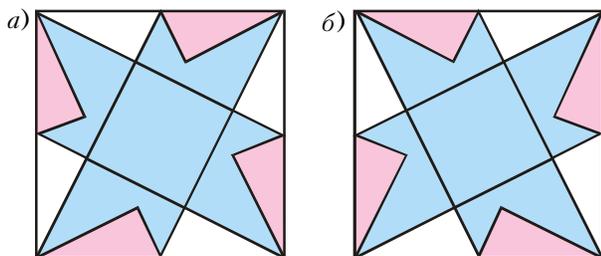
Если любое четное черное число есть начало некоторой одноцветной 3-членной арифметической прогрессии, то все доказано. Предположим, что все 3-членные арифметические прогрессии, начинающиеся некоторым четным черным числом  $a$ , не являются черными. Рассмотрим множество  $a + 2\mathbf{N} = \{a + 2n; n \in \mathbf{N}\}$ . Если для каждого белого числа из  $a + 2\mathbf{N}$  имеется одноцветная 3-членная арифметическая прогрессия, то все ясно. Выберем белое число  $b$  из  $a + 2\mathbf{N}$ , из которого не выходит ни одна 3-членная белая арифметическая прогрессия. Положим  $d = b - a$  и рассмотрим множество  $b + d\mathbf{N}$ . Если, начиная с некоторого номера, все элементы множества  $b + d\mathbf{N}$  одноцветны, то все ясно. Поэтому найдется такой номер  $n$ , что число  $b + dn$  белое, а число  $b + d(n+1)$  черное.

Положим  $c = b + \frac{dn}{2}$  и заметим, что  $c$  — целое число, поскольку  $d$  четно. Если  $c$  белое, то  $b, c, b + dn$  — белая прогрессия. Если же  $c$  черное, то  $a, c, b + d(n+1)$  — черная прогрессия. Получили противоречие с выбором чисел  $a, b$ .

В.Васильева, И.Протасов

**M1755\***. Имеется 10 квадратных салфеток, площадь каждой из которых равна 1, и квадратный стол, площадь которого равна 5. Докажите, что стол можно покрыть салфетками в два слоя. (Салфетки можно перегибать, но нельзя разрывать.)

Предъявим должное покрытие десятью салфетками квадратного стола. Будем считать лицевую сторону каждой салфетки синей, а изнаночную — красной. Расположение первых пяти салфеток на столе показано на рисунке *а*, расположение остальных пяти салфеток показано на рисунке *б*. (Обратите внимание на загнутые уголки салфеток!) Совмещение двух расположений на одном



квадратном столе дает покрытие салфетками такое, что каждый участок стола покрыт в два слоя.

В.Произволов

**Ф1763.** При компьютерном моделировании создан мир, в котором скорость звука  $c_1 = 3$  м/с, а скорость света  $c_2 = 8$  м/с. Маленький автомобиль едет со скоростью  $v_0 = 5$  м/с вдоль прямой, наблюдатель находится на расстоянии  $L = 20$  м от этой прямой. В каком месте он видит автомобиль в тот момент, когда звук мотора слышен из ближайшей к наблюдателю точки прямой? (Считайте, что наблюдатель способен верно определить направление на источник приходящего звука.)

Испущенный из ближайшей точки звук пройдет расстояние  $L$  за время  $L/c_1$ . За это время автомобиль переместится в точку, удаленную на расстояние  $v_0 L/c_1$ . Однако наблюдатель увидит его не в этой точке, а ближе. Обозначим расстояние до искомой точки буквой  $x$  (см. рисунок). Тогда  $x$  можно найти из уравнения

$$\frac{L}{c_1} = \frac{x}{v_0} + \frac{\sqrt{x^2 + L^2}}{c_2}.$$

После очевидного преобразования получим

$$\frac{L^2}{c_1^2} - \frac{2Lx}{c_1 v_0} + \frac{x^2}{v_0^2} = \frac{x^2 + L^2}{c_2^2}.$$

Легко найти ответ в буквенном виде, однако выпишем сразу числовые ответы:

$$x_1 \approx 17 \text{ м и } x_2 \approx 92 \text{ м.}$$

Очевидно, что второй ответ нам не подходит, потому что  $x$  должно быть меньше  $v_0 L/c_1 \approx 33$  м. Лишний корень мы получили, возводя в квадрат обе части исходного уравнения.

З.Рафаилов

**Ф1764.** Найдите ускорение тележки, на которой находятся два груза (см. рисунок). Стол гладкий, коэффициент трения между тележкой и грузами  $\mu$ .

При малых значениях  $F$  система останется в покое. По мере увеличения силы при некотором ее значении малый груз начнет проскальзывать по тележке, а большой груз будет двигаться вместе с тележкой. При еще больших значениях силы проскальзывать будут оба груза.

Рассмотрим сначала случай частичного проскальзывания. Обозначим буквой  $a$  ускорение тележки, а значит, и большого груза, тогда ускорение малого груза будет направлено в противоположную сторону и по величине тоже будет  $a$ :

$$F - \mu mg - T = (2m + M)a,$$

$$T - \mu mg = ma,$$

где  $T$  — натяжение нити. Отсюда получим

$$a = \frac{F - 2\mu mg}{M + 3m}.$$

