

Поскольку

$$ab - p(p - c) = ((p - a) + (p - c))((p - b) + (p - c)) - (p - c)((p - a) + (p - b) + (p - c)) = (p - a)(p - b),$$

$$\operatorname{tg}^2(C/2) = r^2 / (p - c)^2 = (p - a)(p - b) / p(p - c),$$

а $p(p - c) < ab$, выражение $AL^2 + BL^2 - c^2$ отрицательно, т.е. угол ALB тупой.

А.Заславский

M1754*. Каждое число натурального ряда окрашено либо в черный, либо в белый цвет. Докажите, что найдется бесконечная возрастающая последовательность четных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ такая, что последовательность

$$a_1, \frac{a_1 + a_2}{2}, a_2, \frac{a_2 + a_3}{2}, a_3, \dots, a_n, \frac{a_n + a_{n+1}}{2}, a_{n+1}, \dots$$

одноцветна.

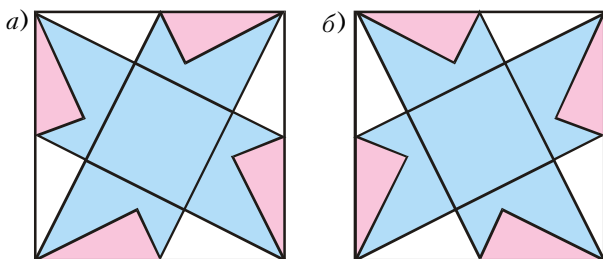
Если любое четное черное число есть начало некоторой одноцветной 3-членной арифметической прогрессии, то все доказано. Предположим, что все 3-членные арифметические прогрессии, начинающиеся некоторым четным черным числом a , не являются черными. Рассмотрим множество $a + 2\mathbf{N} = \{a + 2n; n \in \mathbf{N}\}$. Если для каждого белого числа из $a + 2\mathbf{N}$ имеется одноцветная 3-членная арифметическая прогрессия, то все ясно. Выберем белое число b из $a + 2\mathbf{N}$, из которого не выходит ни одна 3-членная белая арифметическая прогрессия. Положим $d = b - a$ и рассмотрим множество $b + d\mathbf{N}$. Если, начиная с некоторого номера, все элементы множества $b + d\mathbf{N}$ одноцветны, то все ясно. Поэтому найдется такой номер n , что число $b + dn$ белое, а число $b + d(n + 1)$ черное.

Положим $c = b + \frac{dn}{2}$ и заметим, что c — целое число, поскольку d четно. Если c белое, то $b, c, b + dn$ — белая прогрессия. Если же c черное, то $a, c, b + d(n + 1)$ — черная прогрессия. Получили противоречие с выбором чисел a, b .

В.Васильева, И.Протасов

M1755*. Имеется 10 квадратных салфеток, площадь каждой из которых равна 1, и квадратный стол, площадь которого равна 5. Докажите, что стол можно покрыть салфетками в два слоя. (Салфетки можно перегибать, но нельзя разрывать.)

Предъявим должное покрытие десятью салфетками квадратного стола. Будем считать лицевую сторону каждой салфетки синей, а изнаночную — красной. Расположение первых пяти салфеток на столе показано на рисунке *а*, расположение остальных пяти салфеток показано на рисунке *б*. (Обратите внимание на загнутые уголки салфеток!) Совмещение двух расположений на одном



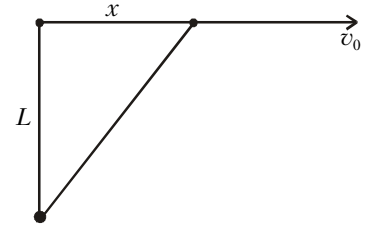
квадратном столе дает покрытие салфетками такое, что каждый участок стола покрыт в два слоя.

В.Произволов

Ф1763. При компьютерном моделировании создан мир, в котором скорость звука $c_1 = 3$ м/с, а скорость света $c_2 = 8$ м/с. Маленький автомобиль едет со скоростью $v_0 = 5$ м/с вдоль прямой, наблюдатель находится на расстоянии $L = 20$ м от этой прямой. В каком месте он видит автомобиль в тот момент, когда звук мотора слышен из ближайшей к наблюдателю точки прямой? (Считайте, что наблюдатель способен верно определить направление на источник приходящего звука.)

Испущенный из ближайшей точки звук пройдет расстояние L за время L/c_1 . За это время автомобиль переместится в точку, удаленную на расстояние $v_0 L/c_1$. Однако наблюдатель увидит его не в этой точке, а ближе. Обозначим расстояние до искомой точки буквой x (см. рисунок). Тогда x можно найти из уравнения

$$\frac{L}{c_1} = \frac{x}{v_0} + \frac{\sqrt{x^2 + L^2}}{c_2}.$$



После очевидного преобразования получим

$$\frac{L^2}{c_1^2} - \frac{2Lx}{c_1 v_0} + \frac{x^2}{v_0^2} = \frac{x^2 + L^2}{c_2^2}.$$

Легко найти ответ в буквенном виде, однако выпишем сразу числовые ответы:

$$x_1 \approx 17 \text{ м и } x_2 \approx 92 \text{ м}.$$

Очевидно, что второй ответ нам не подходит, потому что x должно быть меньше $v_0 L/c_1 \approx 33$ м. Лишний корень мы получили, возводя в квадрат обе части исходного уравнения.

З.Рафаилов

Ф1764. Найдите ускорение тележки, на которой находятся два груза (см. рисунок). Стол гладкий, коэффициент трения между тележкой и грузами μ .

При малых значениях F система останется в покое. По мере увеличения силы при некотором ее значении малый груз начнет проскальзывать по тележке, а большой груз будет двигаться вместе с тележкой. При еще больших значениях силы проскальзывать будут оба груза.

Рассмотрим сначала случай частичного проскальзывания. Обозначим буквой a ускорение тележки, а значит, и большого груза, тогда ускорение малого груза будет направлено в противоположную сторону и по величине тоже будет a :

$$F - \mu mg - T = (2m + M)a,$$

$$T - \mu mg = ma,$$

где T — натяжение нити. Отсюда получим

$$a = \frac{F - 2\mu mg}{M + 3m}.$$

