Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 сентября 2001 года по адресу: 117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №3 – 2001» и номера задач, решения которых Вы посылаете, например «М1771» или «Ф1778». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем Вашим адресом и необходимый набор марок (в этом конверте Вы получите результаты проверки решений).

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с Вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «Задачник «Кванта», новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором Вы учитесь.

Задачи М1771—М1780, Ф1778 — Ф1787

М1771. В результате деления числа $\underbrace{111\ldots11}_{3^n\text{ единиц}}$ (n – натуральное) на 3^n получили число M. Докажите, что число M целое и его можно разложить на n различных множителей.

Д.Мамедьяров

М1772. Каждое число последовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots$ $\ldots, a_{2n}, a_{2n+1}$ равно 2, 5 или 9. При этом $a_1 = a_{2n+1}$, но любые два соседних числа различны. Докажите равенство

$$a_1a_2 - a_1a_3 + a_3a_4 - \ldots + a_{2n-1}a_{2n} - a_{2n}a_{2n+1} = 0.$$

В.Произволов

М1773. Высота CD и биссектриса AE прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$) пересекаются в точке F (рис.1). Пусть G – точка пересечения прямых ED и BF. Докажите, что площади четырехугольника $CEGF$ и треугольника BDG равны.

И.Жук

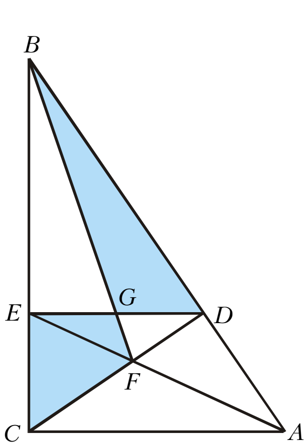

Рис.1

М1774. Король сказочной страны пригласил на пир людоедов своей страны. Среди них есть людоеды, которые хотят съесть других людоедов. (Если людоед A хочет съесть людоеда B, то это не значит, что людоед B хочет съесть людоеда A.) Известно, что наибольшая цепочка, в которой первый людоед хочет съесть второго, второй – третьего и т.д., состоит из шести людоедов. Докажите, что король может так рассадить людоедов по шести комнатам, что в каждой комнате никто не хочет никого съесть.

О.Мельников

М1775. а) Существует ли квадрат, все вершины и все середины сторон которого лежат на гиперболах $xy = \pm 1$?
б) Докажите, что существует бесконечно много параллелограммов, одна из вершин каждого из которых – начало координат, две другие лежат на гиперболе $xy = 1$, а четвертая – на гиперболе $xy = -1$.
в) Докажите, что площадь любого такого параллелограмма равна $\sqrt{5}$.
г) Рассмотрим для любого такого параллелограмма $OABC$ порожденную им решетку, т.е. множество таких точек M, что $\vec{OM} = k\vec{OA} + l\vec{OC}$, где k, l – целые числа. Докажите, что внутренность «креста», ограниченного гиперболами $xy = \pm 1$, не содержит ни одной точки этой решетки, кроме начала координат.

Н.Осипов

М1776. Час назад каждый брат в семье был в ссоре с одинаковым количеством сестер, а каждая сестра – с различным количеством братьев. Сейчас некоторые из них помирились, и каждая сестра в ссоре с одинаковым количеством братьев, а каждый брат – с различным количеством сестер.
Сколько сестер и братьев в этой беспокойной семье?

И.Акулич, А.Жуков

М1777. В квадрат со стороной 1 вписан четырехугольник. Его стороны являются гипотенузами четырех прямоугольных треугольников, в каждый из которых вписана окружность (рис.2). Докажите, что сумма радиусов этих