

# Материалы вступительных экзаменов 2000 года

Институт криптографии, связи и информатики Академии ФСБ

## МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультет прикладной математики)

1. В сосуд емкостью 6 л налито 4 л 70%-го раствора серной кислоты; во второй сосуд той же емкости налито 3 л 90%-го раствора серной кислоты. Сколько литров раствора нужно перелить из второго сосуда в первый, чтобы в нем получился  $r\%$ -й раствор серной кислоты? Найдите все  $r$ , при которых задача имеет решение.

2. При всех значениях параметра  $a$  определите количество решений уравнения

$$|x^2 - 2x - 3| = a.$$

3. Решите уравнение

$$\log_{\text{ctg} x} (3 + 2 \cos 2x + 2 \cos 4x) = 0.$$

4. Решите неравенство

$$\log_{\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\pi-0,1}} (|x| - x^2 + 7) \leq 0.$$

5. Из точки сферы радиуса  $R$  проведены три хорды одинаковой длины. Углы между всеми хордами равны  $\alpha$ . Найдите длину хорд.

Вариант 2

(факультет информационной безопасности)

1. Автомобиль едет из пункта  $A$  в пункт  $B$ . От пункта  $A$  до пункта  $C$ , расположенного между  $A$  и  $B$ , он едет со скоростью 48 км/ч. В пункте  $C$  он уменьшает свою скорость на  $a$  км/ч и с этой скоростью едет  $1/3$  пути от  $C$  до  $B$ . Оставшуюся часть пути от  $C$  до  $B$  он едет со скоростью, которая на  $2a$  км/ч превышает первоначальную скорость автомобиля. При каком значении  $a$  автомобиль быстрее всего проделает путь от  $C$  до  $B$ ?

2. Решите уравнение

$$|xy - y - x - c| + |x^2 y^2 + x^2 y + xy^2 + xy - 72| = 0,$$

где

$$c = (\sqrt{57} + 3\sqrt{6} + \sqrt{38} + 6) \times (\sqrt{57} - 3\sqrt{6} - \sqrt{38} + 6).$$

3. Решите уравнение

$$\cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = \frac{1}{16}.$$

4. Решите уравнение

$$3^{|x|} = 5^{x^2+3x+1}.$$

5. В трапеции  $ABCD$  ( $BC \parallel AD$ ) точка  $M$  делит диагональ  $AC$  пополам, а точка  $K$  делит сторону  $CD$  в отношении  $1 : 3$  ( $ЗСК = KD$ ). Найдите отношение площади треугольника  $MKD$  к площади трапеции  $ABCD$ , если  $AD = 4BC$ .

Вариант 3

(факультет специальной техники)

1. Найдите натуральное число  $n$ , удовлетворяющее уравнению

$$\frac{n-1}{n} + \frac{n-2}{n} + \dots + \frac{1}{n} + \left(4 + 5,5 + 7 + \dots + \frac{8+3n}{2}\right) = 62.$$

2. Решите уравнение

$$\left|2 + \frac{x}{9}\right|^{\log_3 \frac{18+x}{9}} = 61 + c,$$

где

$$c = \left(26,7 - 13\frac{1}{5}\right) : 1,8 + 0,125 \cdot \left(1,88 + 2\frac{3}{25}\right) + 22 \cdot \frac{3}{5,5}.$$

3. Решите уравнение

$$\text{tg} \left( \frac{1}{3} \arccos \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right) \sin^2 x - (\sqrt{3} + 1) \sin x \cos x + \sqrt{3} \cos^2 x = 0.$$

4. Решите неравенство

$$\sqrt{x^2 - 32x + 112} > x^2 - 2x - 8.$$

5. Боковые ребра треугольной пирамиды наклонены к плоскости основания под углом  $30^\circ$ . Основание пирамиды — треугольник со сторонами 2, 3,  $\sqrt{3}$ . Найдите объем пирамиды.

ФИЗИКА

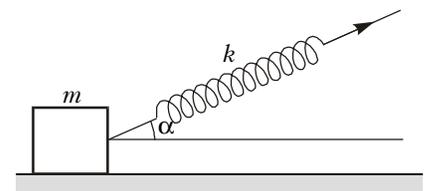
Письменный экзамен

Вариант 1

(факультет специальной техники)

1. Тело, брошенное вертикально вверх из точки, расположенной на высоте  $H$  над поверхностью земли, упало на землю через промежуток времени  $t$ . Найдите начальную скорость тела  $v_0$ .

2. Брусок массой  $m$  покоится на горизонтальной плоскости (см. рисунок). К нему прикреплена недеформи-



рованная пружина жесткостью  $k$ . Какую работу  $A$  нужно совершить, чтобы сдвинуть с места брусок, растягивая пружину в направлении, составляющем угол  $\alpha$  с горизонтом? Коэффициент трения между бруском и плоскостью  $\mu$ .

3. От источника с ЭДС  $E$  и внутренним сопротивлением  $r$  протянута к потребителю двухпроводная линия электропередачи длиной  $l$ . Каково сопротивление  $\rho$  участка провода линии электропередачи единичной длины, если мощность потребителя  $P$  и он рассчитан на напряжение  $U$ ? Сечение провода линии электропередачи одинаково по всей его длине.

4. В цилиндре под поршнем находится воздух с относительной влажностью  $\phi_1 = 80\%$  при температуре  $T_1 = 300$  К. Объем воздуха  $V_1 = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$ . Какой станет влажность  $\phi_2$ , если объем воздуха уменьшить до  $V_2 = 0,37 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$ , а температуру повысить до  $T_2 = 373$  К? Давление насыщенного водяного пара равно  $p_1 = 3500$  Па при температуре  $T_1$  и  $p_2 = 100000$  Па при температуре  $T_2$ .

5. Светящаяся точка лежит на главной оптической оси рассеивающей линзы на расстоянии  $d = 12$  см от нее. Фокусное расстояние линзы  $|F| = 8$  см.

Определите расстояние  $f$  от изображения точки до линзы.

Вариант 2

(факультет информационной безопасности)

1. Пуля, летящая со скоростью  $v_0$ , ударяет в массивную неподвижную стену и проникает в нее на глубину  $s$ . С каким ускорением  $a$  двигалась пуля внутри стены? Движение пули в стене считать прямолинейным и равнопеременным.

2. Санки массой  $m$  съезжают без начальной скорости с горки высотой  $H$  по кратчайшему пути и приобретают у подножия горки скорость  $v$ . Какую минимальную работу  $A$  необходимо совершить, чтобы втащить санки на горку от ее подножия, прикладывая силу вдоль плоской поверхности горки?

3. ЭДС аккумулятора  $\mathcal{E}$ , внутреннее сопротивление  $r$ . Определите разность потенциалов  $U$  на зажимах аккумулятора, если внешняя цепь потребляет мощность  $P$ .

4. В запаянной трубке объемом  $V = 0,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$  находится водяной пар при давлении  $p_1 = 8 \cdot 10^3 \text{ Па}$  и температуре  $T_1 = 423 \text{ К}$ . Какая масса  $m$  воды сконденсируется в трубке при ее охлаждении до температуры  $T_2 = 295 \text{ К}$ ? Давление насыщенного водяного пара при температуре  $T_2$  равно  $p_2 = 2,5 \cdot 10^3 \text{ Па}$ . Объемом жидкости по сравнению с объемом трубки можно пренебречь. Молярная масса воды  $M = 0,018 \text{ кг/моль}$ , универсальная газовая постоянная  $R = 8,31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$ .

5. На рассеивающую линзу падает сходящийся пучок лучей. После прохождения через линзу лучи пересекаются в точке на главной оптической оси, отстоящей от линзы на  $L$ . Если линзу убрать, точка пересечения лучей переместится на  $l$  по направлению к месту, где располагалась линза. Каково фокусное расстояние  $F$  линзы?

Вариант 3

(факультет прикладной математики)

1. Пуля, летящая со скоростью  $v_0$ , ударяет в массивную неподвижную стену и проникает в нее на глубину  $s$ . Сколько времени  $t$  двигалась пуля внутри стены? Движение пули в стене считать прямолинейным и равнопеременным.

2. На доске, наклоненной к горизонту под углом  $\alpha$ , покоится ящик массой  $m$ . Чтобы передвинуть ящик вниз на расстояние  $L$ , прикладывая силу вдоль наклонной плоскости, надо совершить

минимальную работу  $A$ . Какую минимальную работу  $A'$  потребуется совершить, прикладывая силу вдоль наклонной плоскости, чтобы вернуть по доске этот ящик на прежнее место?

3. При подключении лампочки к аккумулятору с ЭДС  $\mathcal{E}$  напряжение на лампочке равно  $U$ , а сила тока составляет  $I$ . Чему равно внутреннее сопротивление  $r$  аккумулятора?

4. Пространство в цилиндре под поршнем объемом  $V_0 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$  занимает насыщенный водяной пар при температуре  $T = 373 \text{ К}$ . Найдите массу  $m$  воды, образовавшейся в результате изотермического уменьшения объема пара до  $V = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$ . Давление насыщенного водяного пара при температуре  $T$  равно  $p_n = 10^5 \text{ Па}$ . Молярная масса воды  $M = 0,018 \text{ кг/моль}$ , универсальная газовая постоянная  $R = 8,31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$ .

5. На пути сходящегося пучка света перпендикулярно его оси симметрии поставили тонкую собирающую линзу с фокусным расстоянием  $F$ , в результате чего лучи пересеклись на главной оптической оси на расстоянии  $L$  от линзы. Линзу убрали. На каком расстоянии  $s$  от места, где располагалась линза, пересекутся лучи?

Публикацию подготовили  
А.Леденев, В.Кириллов, А.Пичкур

Московский государственный  
технический университет  
им.Н.Э.Баумана

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Слесарь, работая вместе с учеником, собирался выполнить некоторый заказ за 30 дней. После шести дней совместной работы ученик уволился, и слесарь, работая еще 40 дней, закончил выполнение заказа. За сколько дней слесарь, работая один, может выполнить этот заказ?

2. Решите уравнение

$$2 \cos^2 x + 3\sqrt{3} \sin|x| = 5.$$

3. Решите уравнение

$$\log_4(20x - 34) = 2 + \log_2(5 - x).$$

4. Решите неравенство

$$(x - 1)\sqrt{3 + 2x - x^2} < 0.$$

5. Стороны  $OA$  и  $OB$  треугольника  $OAB$  лежат на графике функции  $y = |x| - x$ , а на стороне  $AB$  лежит точка  $M(0; 1)$ . Каким должен быть угловой

коэффициент в уравнении прямой  $AB$ , чтобы площадь треугольника  $OAB$  была наименьшей? Найдите эту площадь.

6. Найдите все значения  $a$ , при которых система уравнений

$$\begin{cases} \log_2(x + y) = 1 + \log_2 x, \\ (x - a)^2 + (y - x - a)^2 = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение. Найдите это решение при каждом  $a$ .

7. Через диагональ прямоугольного параллелепипеда и точку, лежащую на боковом ребре, не пересекающем эту диагональ, проведена плоскость так, чтобы площадь сечения параллелепипеда этой плоскостью была наименьшей. Найдите стороны основания параллелепипеда, если известно, что диагонали сечения равны 6 и  $2\sqrt{3}$ , а угол между ними  $30^\circ$ .

Вариант 2

1. За три часа один лыжник прошел на 2,5 км больше другого, так как один километр он проходил на одну минуту быстрее. За сколько минут каждый лыжник проходил один километр?

2. Решите уравнение

$$1 + \cos 2x = \sqrt{2} \sin x.$$

3. Решите уравнение

$$3 \cdot 2^{\sqrt{x}} + 2^{3-\sqrt{x}} = 25.$$

4. Решите неравенство

$$\frac{\lg(4x^2 - 12x + 9)}{\lg x} < 2.$$

5. Каким должен быть угловой коэффициент прямой, проходящей через начало координат, чтобы расстояние между ее точками пересечения с графиком функции

$$f(x) = 0,25x^2 + 2x - 1$$

было наименьшим? Найдите это расстояние.

6. Определите все значения  $a$ , при которых уравнение

$$5(x - 1)^2 = a(5 - |x| - x)$$

имеет два различных корня. Укажите эти корни при каждом из найденных значений  $a$ .

7. В сферу с площадью  $S$  вписан прямоугольный параллелепипед. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через его диагональ, если эта плоскость образует угол  $30^\circ$  с одной диагональю основания, параллельна другой диагонали основания и наклонена к плоскости основания под углом  $45^\circ$ .

Публикацию подготовил Л.Паршев

Московский государственный институт электронной техники (технический университет)

**МАТЕМАТИКА**

Письменный экзамен

Вариант 1

(технические факультеты)

- Вычислите  $\operatorname{tg}71^\circ \sin 38^\circ + \sin 308^\circ$ .
- Решите уравнение  $\operatorname{tg} x = 2\sqrt{3} \cos x$ .
- Решите уравнение  $\log_{\frac{x+11}{x-3}}(x+3) = 1$ .
- Решите неравенство  $(11 - \sqrt{7})^x \geq 70^{x/2}$ .
- Найдите сумму 5 положительных чисел, расположенных между  $\frac{64}{125}$  и 125, из которых вместе с числами  $\frac{64}{125}$  и 125 можно составить геометрическую прогрессию.
- Пароход вышел из пункта  $A$  в пункт  $B$ , расположенный ниже по течению реки, и, дойдя до пункта  $B$ , сразу же повернул обратно и вернулся в пункт  $A$ , затратив на весь путь 16 часов. За какое время сплавляются плоты от  $A$  до  $B$ , если известно, что в стоячей воде расстояние от  $A$  до  $B$  пароход преодолевает за 6 часов?
- Сторона квадрата  $ABCD$  равна  $a$ . Точки  $A$  и  $D$  являются центрами окружностей  $\Gamma$  и  $\Delta$  радиуса  $a$ . Найдите радиус окружности, расположенной внутри квадрата, касающейся стороны  $CD$ , окружности  $\Gamma$  внешним образом, а окружности  $\Delta$  внутренним образом.
- Изобразите множество точек координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству  $|2^x - y| < 2^{x+2}$ .
- Решите уравнение  $4,25 - 9 \cos^2 \pi x - 5 \sin \pi x = \sqrt{5 + 24x - 36x^2}$ .
- Дан куб  $ABCD A' B' C' D'$  с ребром, равным 1. Точка  $M$  – середина ребра  $B' C'$ , точка  $N$  лежит на продолжении ребра  $AA'$  за точкой  $A$ , причем  $AN = \frac{1}{3}$ . Найдите площадь сечения куба плоскостью, проходящей через точки  $M$ ,  $N$  и параллельной прямой  $BD$ .

- Найдите все такие числа  $a$ , что для всех чисел  $b$  выполнено неравенство

$$3b^4 + ab^3 \neq -1.$$

Вариант 2

(экономический факультет)

- Найдите значение выражения  $\log_{0,64} \log_{1024} 256$ .
- Упростите  $\frac{25y - 9y^{-1}}{5y^{3/4} + 3y^{-1/4}} - \frac{2y + 5 + 2y^{-1}}{y^{3/4} + 2y^{-1/4}}$ .
- Вычислите  $\sin^2\left(5\alpha - \frac{\pi}{4}\right) + 0,5 \cos(2\alpha - \pi)$  при  $\alpha = \frac{\pi}{8}$ .
- Решите неравенство  $\frac{2x + 5}{x + 2} \geq -2x$ .
- Решите уравнение  $2^{x+3} - 2^{x+2} - 2^{x+1} = 7^{x+1} - 7^x$ .
- Решите уравнение  $\operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 4x = 1$ .
- Постройте график функции  $y = \log_4(|5 - 2|x|| - 5)$ .
- В прямоугольнике  $ABCD$  радиусы окружностей, вписанных в треугольники  $ABC$  и  $ACD$ , равны 2. Расстояние между точками касания этих окружностей с диагональю  $AC$  равно 7. Найдите стороны прямоугольника.
- Найдите сумму наибольшего и наименьшего корней уравнения  $4 \cos^3 3x - \sin^2 2x = 3$ , принадлежащих промежутку  $[-\pi; \pi]$ .
- Шестизначное число  $A$  делится на 11, а число, полученное вычеркиванием его последней цифры, делится на 17. Найдите наименьшее число  $A$ , удовлетворяющее этим требованиям.
- При каком значении параметра  $a$  система неравенств 
$$\begin{cases} y \leq \sqrt{x-a}, \\ x \leq \sqrt{y-a} \end{cases}$$
 имеет единственное решение?

**ФИЗИКА**

Письменный экзамен

Вариант 1

- Чему равна скорость  $v$  движения автомобиля, если его колеса диамет-

ром  $D = 70$  см вращаются с частотой  $n = 720$  об/мин?

2. Какой должна быть минимальная площадь  $S$  плоской льдины толщиной  $H = 40$  см, чтобы удерживать на воде груз массой  $m = 1$  т?

3. Деревянный шар массой  $M = 1$  кг висит на шнуре так, что расстояние от точки подвеса шнура до центра шара равно  $l = 1$  м. В шар попадает горизонтально летящая со скоростью  $v_1 = 400$  м/с пуля массой  $m = 10$  г, которая пробивает его точно по диаметру и вылетает из шара со скоростью  $v_2 = 230$  м/с. Определите угол  $\alpha$  максимального отклонения подвеса от вертикали. Сопротивлением воздуха и временем пробивания шара пулей пренебречь.

4. С одним молем идеального газа проводят циклический процесс, состоящий из двух изохор и двух изобар (рис.1). Определите работу  $A$  газа за

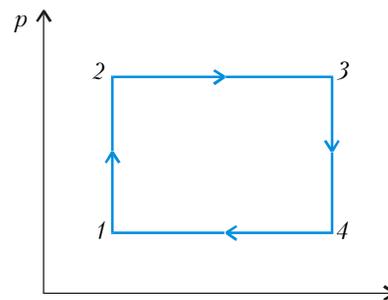


Рис. 1

цикл, если известно, что в состоянии 1 температура газа  $T_1 = 300$  К, а в состояниях 2 и 4  $T_2 = T_4 = 320$  К.

5. Для приготовления ванны емкостью  $V = 200$  л смешали холодную воду при  $t_1 = 10^\circ\text{C}$  с горячей при  $t_2 = 60^\circ\text{C}$ . Какие объемы  $V_1$  и  $V_2$  той и другой воды надо взять, чтобы установилась температура  $t = 40^\circ\text{C}$ ?

6. Начальная температура вольфрамовой спирали лампочки накаливания равна  $t_0 = 0^\circ\text{C}$ . При пропускании электрического тока спираль раскалилась, и ее сопротивление увеличилось в  $n = 12$  раз. До какой температуры  $t$  нагрелась спираль?

7. Батарея аккумуляторов имеет ЭДС  $\mathcal{E} = 12$  В. При силе тока в цепи  $I = 4$  А напряжение на зажимах батареи  $U = 11$  В. Определите ток  $I_k$  короткого замыкания этой батареи.

8. Электрическая цепь состоит из источника с ЭДС  $\mathcal{E} = 12$  В, конденсатора емкостью  $C = 5$  мкФ, катушки индуктивности и ключа (рис.2). Какова максимальная энергия  $W$  конденсатора при электрических колебаниях, возникающих в цепи при замыкании ключа? Внутренним сопротивлением

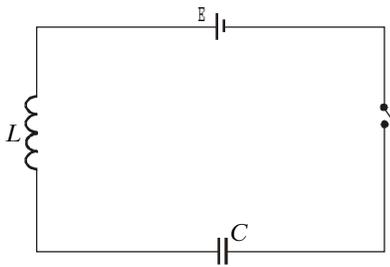


Рис. 2

источника, сопротивлением катушки и проводов пренебречь.

9. Световод, по которому распространяется параллельный пучок света, необходимо согнуть под углом  $90^\circ$  (рис.3). Определите минимальный внешний радиус  $R$  изгиба световода

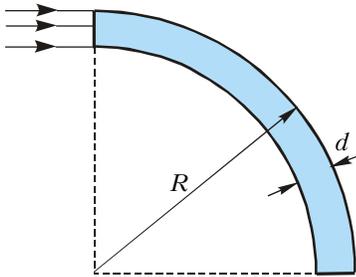


Рис. 3

толщиной  $d = 1$  мм, чтобы свет, распространяющийся по световоду, не выходил через его боковую поверхность.

10. Определите задерживающее напряжение  $U$  для электронов, испускаемых с поверхности натрия под действием монохроматического излучения с длиной волны  $\lambda = 300$  нм.

#### Вариант 2

1. Шарик, скатываясь с наклонного желоба с нулевой начальной скоростью, за первую секунду движения ( $t_1 = 1$  с) прошел путь  $s_1 = 10$  см. Какой путь  $s_2$  он пройдет за время  $t_2 = 3$  с?

2. С какой силой  $F$  давит на дно шахтной клетки груз массой  $m = 100$  кг, если клеть поднимется вверх с ускорением  $a = 3$  м/с<sup>2</sup>?

3. Призма массой  $M = 90$  кг с углом наклона  $\alpha = 60^\circ$  лежит на гладкой горизонтальной поверхности льда (рис.4). С какой скоростью  $V$  будет

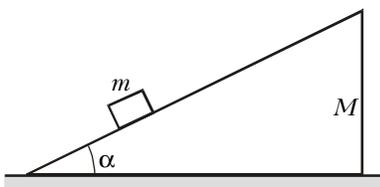


Рис. 4

двигаться призма, если по ней побегит вверх собака массой  $m = 10$  кг со скоростью  $v = 2$  м/с относительно призмы?

4. Сосуд содержит атмосферный воздух при температуре  $t_1 = 27^\circ\text{C}$ . Сосуд плотно закрывают и начинают медленно охлаждать. При  $t_2 = 15^\circ\text{C}$  на стенках сосуда появляется роса. Определите относительную влажность  $\phi$  атмосферного воздуха.

5. Над молекул идеального одноатомного газа совершают циклический процесс, изображенный на рисунке 5.

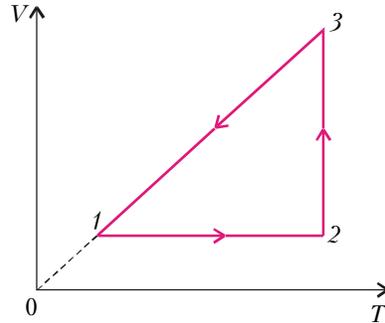


Рис. 5

Определите КПД  $\eta$  цикла, если известно, что в начальном состоянии 1 температура газа  $T_1 = 300$  К, отношение объемов газа в состояниях 3 и 2 равно  $n = 2$  и при изотермическом расширении газ совершает работу  $A = 5$  кДж.

6. Напряженность электрического поля внутри плоского конденсатора  $E = 1$  кВ/м, его заряд  $q = 2 \cdot 10^{-7}$  Кл. С какой силой  $F$  притягиваются друг к другу пластины конденсатора?

7. К источнику с ЭДС  $\mathcal{E} = 4,5$  В и внутренним сопротивлением  $r = 1$  Ом подключили лампочку, сопротивление которой  $R = 29$  Ом. Определите работу  $A$  источника за время  $t = 1$  мин.

8. В схеме (рис.6) ЭДС источника  $\mathcal{E} = 4,5$  В, сопротивление резистора

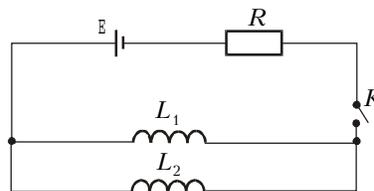


Рис. 6

$R = 5$  Ом, индуктивности катушек  $L_1 = 1$  мГн и  $L_2 = 2$  мГн. Внутреннее сопротивление источника и сопротивления катушек пренебрежимо малы. Найдите установившиеся токи  $I_1$  и  $I_2$  в катушках после замыкания ключа  $K$ .

9. На расстоянии  $d = 15$  см перед собирающей линзой с фокусным расстоянием  $F = 10$  см перпендикулярно

оптической оси расположен стержень высотой  $H = 3$  см. По другую сторону от линзы на расстоянии  $l = 20$  см от нее также перпендикулярно оптической оси расположено плоское зеркало. На каком расстоянии  $l_1$  от линзы будет находиться изображение стержня, создаваемое системой линза + зеркало, и какого размера  $H_1$  оно будет?

10. Определите длину волны  $\lambda$  излучения, падающего на поверхность цинка, если величина задерживающего напряжения для фотоэлектронов равно  $U = 1,2$  В.

#### Физические постоянные

Постоянная Планка

$$h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$$

Скорость света в вакууме

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$$

Элементарный заряд

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$$

Универсальная газовая постоянная

$$R = 8,3 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$$

Плотность льда  $\rho_3 = 900 \text{ кг/м}^3$

Давление насыщенных паров

при температуре  $27^\circ\text{C}$

$$p_n = 3,6 \text{ кПа}$$

при температуре  $15^\circ\text{C}$

$$p_n = 1,7 \text{ кПа}$$

Температурный коэффициент сопротивления вольфрама  $\alpha = 5 \cdot 10^{-3} \text{ К}^{-1}$

Показатель преломления  $n = 1,5$

Работа выхода

для цинка  $A = 6,7 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$

для натрия  $A = 3,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$

Публикацию подготовили

А.Абрамов, А.Берестов,

И.Кожухов, В.Лосев,

Д.Ничуговский, Т.Олейник,

Г.Сафонова, Т.Соколова,

В.Филиппов

Новосибирский  
государственный университет

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Физический факультет

Каждый вариант состоял из задач трех типов.

Первые три задачи – расчетные, различной трудности: от почти стандартных до сравнительно сложных, требующих смекалки, глубоких знаний, умения разобраться в непривычной или усложненной ситуации.

Четвертая задача – это задача-оценка. Для ее решения надо понять рассматриваемое физическое явление, сформулировать простую (так как

нужна только оценка) физическую модель этого явления, выбрать разумные числовые значения физических величин и, наконец, получить численный результат, более или менее соответствующий реальности. В тексте задачи подчеркивалось, что абитуриент может сам выбрать необходимые для решения задачи величины и их числовые значения.

Пятая задача – эта задача-демонстрация в аудитории. Здесь необходимо понять сущность явления и среди различных факторов выделить главный.

Вариант 1

1. В узкой пробирке длиной  $l$  и сечением  $S$  находится тяжелый шарик так, что пробирка погружена наполовину в жидкость плотностью  $\rho$  и касается дна, как показано на рисунке 1. Найдите массу пустой пробирки.

Рис. 1

2. Сжиженным газом, взятым из баллона, заполнили сосуд объемом  $V_0$ . Когда температура в баллоне и сосуде приняла исходное значение  $T$ , давление в сосуде стало  $p_0$ , а объем жидкости в баллоне уменьшился на  $V$ . Найдите давление насыщенного пара над жидкостью в баллоне, если ее плотность  $\rho$ , а молярная масса  $M$ .

3. Незаряженная неподвижная частица распалась в магнитном поле с индукцией  $B$  на две частицы с массами  $m_1$  и  $m_2$  и зарядами  $q$  и  $-q$ . Найдите время, через которое частицы встретятся, если пренебречь кулоновским взаимодействием осколков.

4. Водород находится в закрытом сосуде объемом 1 л при комнатной температуре и атмосферном давлении. Сосуд не разрушаясь выдерживает давление до 10 атм. Оцените, какую часть электронов надо удалить из газа в сосуде, чтобы сосуд лопнул.

5. Полиэтиленовая цилиндрическая упаковка для фотопленки выскальзывает при попытке разрезать ее ножницами, в то время как аналогичная полиэтиленовая пластинка той же толщины, что и стенки упаковки, легко разрезается. Объясните различие в наблюдаемом явлении.

Вариант 2

1. Два груза с массами  $m_1$  и  $m_2$  соединены пружинкой. Если груз 2 положить на опору, оставив груз 1 висеть над ним, то пружина сожмется до длины  $l_1$  (рис.2). Если же придержать груз 1, заставив груз 2 висеть на

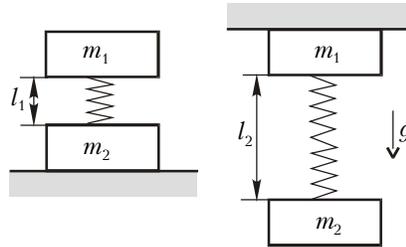


Рис. 2

пружине, то она растянется до длины  $l_2$ . Какова длина пружины в ненапряженном состоянии?

2. Три частицы с одинаковыми зарядами находились в вершинах равнобедренного прямоугольного треугольника. При каком значении  $M$  массы частицы, находящиеся в вершине прямого угла, все три частицы при разлете без начальной скорости будут находиться в вершинах подобного треугольника? Массы двух остальных частиц  $m$ .

3. В схеме на рисунке 3 конденсатор емкостью  $C_1$  заряжен до напряжения

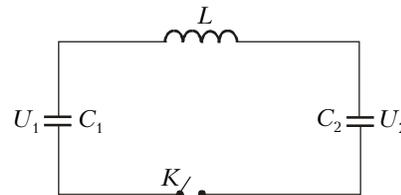


Рис. 3

$U_1$ , а конденсатор емкостью  $C_2$  заряжен до напряжения  $U_2$ . Какой максимальный ток будет в цепи после замыкания ключа  $K$ ? Индуктивность катушки  $L$ .

4. Оцените силу притяжения двух полушарий Земли.

5. См. задачу 5 в предыдущем варианте.

Вариант 3

1. Плоскопараллельная прозрачная пластина толщиной  $d$  с показателем преломления  $n > 1$  ограничена сверху зеркальной гранью, перпендикулярной ее сторонам. Луч света падает на пластину вблизи ребра, образованного стороной и верхней гранью, составляя угол  $\alpha$  с нормалью к пластине. На каком расстоянии от верхней грани выйдет свет с другой стороны пластины?

2. Цилиндрический теплоизолированный сосуд высотой  $2l$  и площадью основания  $S$  стоит вертикально в поле тяжести. Сосуд в начальный момент разделен пополам теплопроводящим поршнем неизвестной массы, а в каждой из половинок сосуда находится газ под давлением  $p_0$ . Затем поршень отпускают, и он после затухания колебаний опускается на расстояние  $h$  от первоначального положения. Найдите массу поршня. Толщиной и теплоемкостью поршня пренебречь. Внутренняя энергия газа с давлением  $p$  и объемом  $V$  равна  $U = \alpha pV$ , где  $\alpha$  – константа.

3. Два тела, с массами  $m_1$  и  $m_2$  и зарядами  $q$  и  $-q$  соответственно, связаны пружиной и находятся в состоянии покоя (пружина не растянута). Мгновенно включается однородное электрическое поле с напряженностью  $\vec{E}$ , направленной вдоль пружины от первого тела ко второму. Найдите максимальные значения скоростей тел при последующем их движении. Электрическим взаимодействием тел между собой пренебречь.

4. Оцените относительное изменение периода обращения Земли вокруг оси ( $\Delta T/T$ ), при котором относительное уменьшение веса тела ( $\Delta P/P$ ) будет равно 10%.

5. Деревянный стержень подвешен за конец на нити над сосудом с водой. При подъеме сосуда стержень сначала погружается в воду вертикально, затем наклоняется, а при дальнейшем подъеме ложится на воду и далее остается горизонтальным. Объясните наблюдаемое явление.

Публикацию подготовили  
Г.Меледин, С.Лежнин,  
А.Мильштейн

Российский государственный педагогический университет им.А.И.Герцена

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Для каждого натурального числа  $n > 1$  определена функция

$$f_n(x) = (0,25)^{\log_n(nx-x^2)}.$$

а) Найдите области определения этих функций.

б) Нарисуйте график функции

$$g(x) = (f_4(x))^{-1}.$$

в) При каких  $a$  уравнение  $|g(x) - 1| = a$  имеет ровно два решения?

2. Решите неравенство

$$|2^x - 3| < 4^x - 3.$$

3. Решите уравнение

$$\frac{\sin 6x}{\cos 2x} = \sqrt{2} - \operatorname{tg} 2x.$$

4. Вокруг квадрата описана окружность, а около нее описан правильный шестиугольник. Определите площадь этого шестиугольника, если сторона квадрата равна  $a$ .

5. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с острым углом  $\alpha$ . Высота пирамиды равна  $H$ . Все боковые ребра составляют с плоскостью основания один и тот же угол  $\beta$ . Найдите объем пирамиды.

#### Вариант 2

1. Для каждого натурального числа  $n$  определена функция

$$f_n(x) = \sqrt{\frac{x-1}{(x+n)(x-2)}}.$$

а) Найдите области определения этих функций.

б) Нарисуйте график функции

$$g(x) = \frac{x-2}{|x-1|} f_2^2(x).$$

в) При каких  $a$  уравнение  $a - g(x) = 0$  не имеет решений?

2. Решите неравенство

$$(0,8)^{\log_3^2 - 2 \log_3 x} \leq (1,25)^{-6 + \log_3 x}.$$

3. Решите уравнение

$$\begin{aligned} \sqrt{3} \sin x + \cos x &= \\ &= \frac{1}{2} (\sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x + 1). \end{aligned}$$

4. Докажите, что сумма расстояний от любой точки основания до боковых сторон равнобедренного треугольника есть величина постоянная для данного треугольника.

5. Через две образующие конуса, угол между которыми  $\alpha$ , проведена плоскость, составляющая с основанием угол  $\beta$ . Найдите объем конуса, если его высота равна  $h$ .

Публикацию подготовили Г.Хамов, О.Корсакова

Российский государственный технологический университет им.К.Э.Циолковского

#### МАТЕМАТИКА

##### Письменный экзамен

##### Вариант 1

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{xy} = 4, \\ x + y = 17. \end{cases}$$

2. Решите уравнение

$$\sin^2 6x + \sin^2 4x = \frac{1}{2} + \sin^2 5x.$$

3. В бассейн подведены две трубы: подающая и отводящая, причем через первую бассейн наполняется на 1 час дольше, чем через вторую опорожняется. При заполненном на  $3/4$  бассейне открыли обе трубы, и бассейн оказался пустым через 9 часов. За сколько часов, действуя отдельно, первая труба наполняет, а вторая опорожняет бассейн?

4. Решите неравенство

$$\log_{x-2} 3 + \log_{17-6x} 3 \leq 0.$$

5. При каких значениях параметра  $k$  уравнение

$$2(x+k)^4 + (2x+3k)^4 - 3 = 0$$

имеет два решения?

6. В треугольнике  $ABC$  точки  $E$  и  $K$  делят сторону  $AC$  на три равные части, причем  $E$  лежит между точками  $A$  и  $K$ . На стороне  $BC$  взята точка  $D$  так, что отрезок  $AD$  пересекает  $BE$  в точке  $N$  и отрезок  $BK$  в точке  $M$ , причем  $AN : NM = 11 : 3$ . Найдите отношение  $BD : DC$ .

##### Вариант 2

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1, \\ x + y = 41. \end{cases}$$

2. Решите уравнение

$$\sin^2 4x + \sin^2 2x - \sin^2 3x = \frac{1}{2}.$$

3. Два мотоциклиста выезжают одновременно навстречу друг другу из пунктов  $A$  и  $B$ , расстояние между которыми 240 км, и через 3 часа встречаются. Не останавливаясь, они продолжают движение с той же скоростью, и первый прибывает в  $B$  на 2 часа 30 минут раньше, чем второй в  $A$ . Определите скорость каждого мотоциклиста.

4. Решите неравенство

$$\log_{16-x} (x^2 - 10x + 16) \geq 1.$$

5. При каких значениях параметра  $k$  уравнение

$$3e^{2x+k} + 2e^{2k-3x} - 10 = 0$$

имеет два решения?

6. В треугольнике  $ABC$  точки  $E$  и  $K$  делят сторону  $AC$  на три равные части, причем точка  $E$  лежит между  $A$  и  $K$ . На стороне  $BC$  взята точка  $D$  так, что отрезок  $AD$  пересекает  $BE$  в точке  $N$  и отрезок  $BK$  в точке  $M$ , причем  $AN : NM = 4 : 3$ . Найдите отношение площади четырехугольника  $CKMD$  к площади треугольника  $ABC$ .

#### ФИЗИКА

##### Письменный экзамен

##### Вариант 1

1. Плоский воздушный конденсатор зарядили до разности потенциалов 120 В и отключили от источника тока. Какой станет разность потенциалов между пластинами конденсатора, если расстояние между ними увеличить от 0,2 мм до 0,8 мм, а пространство внутри конденсатора заполнить диэлектриком с проницаемостью  $\epsilon = 5$ ?

2. Тело брошено со скоростью 30 м/с под некоторым углом  $\alpha$  к горизонту. Найдите этот угол, если через 1 с тело оказалось на высоте 10 м. Через какой промежуток времени тело снова окажется на этой высоте?

3. В тепловом процессе (рис.1) 1 моль идеального одноатомного газа

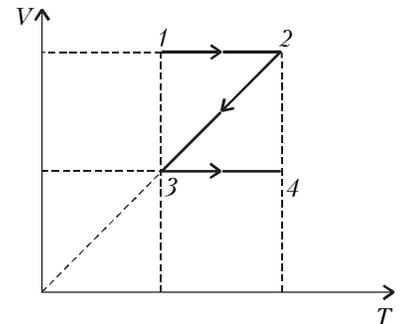


Рис. 1

переводят из начального состояния 1 в конечное состояние 4 (через состояния 2 и 3). Найдите общее количество теплоты, подведенное в этом процессе, если разность конечной и начальной температур равна 100 К. Постройте этот процесс в координатах  $p - V$ .

4. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью  $10^{-5}$  Ф и катушки индуктивностью 0,2 Гн. Конденсатор зарядили до напряжения 2 В, после чего он начал разряжаться.

Какими будут мгновенные значения силы тока в контуре и напряжения на конденсаторе в тот момент, когда энергии магнитного поля в катушке и электрического поля в конденсаторе будут равны?

5. Пуля пробивает закрепленную доску при минимальной скорости 200 м/с. С какой скоростью должна лететь пуля для того, чтобы пробить эту же доску, подвешенную на длинной нити? Масса пули 15 г, масса доски 90 г, пуля попадает точно в центр доски, перпендикулярно ее поверхности.

Вариант 2

1. Металлический шарик массой 0,1 кг висит на нити. Когда шарик сообщили заряд 0,5 мКл, нить отклонилась от вертикали на угол 45°. Найдите напряженность однородного электрического поля, в котором находится шарик, если силовые линии поля направлены горизонтально.

2. Поверхность вольфрама сначала облучают светом с длиной волны 100 нм, а затем с длиной волны 250 нм. Во сколько раз отличаются максимальные кинетические энергии вылетающих электронов в этих случаях? Работа выхода для вольфрама 4,5 эВ.

3. Математическому маятнику в положении равновесия сообщают некоторую скорость, и за 1/4 с она уменьшается в 2 раза. Найдите длину маятника, считая возникшие колебания гармоническими.

4. Один моль гелия из состояния с давлением 150 кПа и объемом 20 л переходит в состояние с давлением 50 кПа и объемом 100 л. Расширение происходит сначала адиабатически, а затем изобарно. Всего газ получил 7700 Дж тепла. Найдите минимальную температуру газа в ходе этого процесса. Вычислите работу, которую совершил газ при расширении.

5. Квадратная рамка согнута из проводника, сопротивление единицы длины которого равно 0,04 Ом/м. Рамка, двигаясь с постоянной скоростью 0,5 м/с, пересекает область однородного магнитного поля (рис.2). Индук-

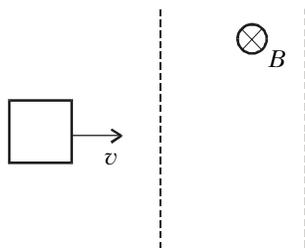


Рис. 2

ция магнитного поля 0,4 Тл, ширина области в несколько раз больше, чем сторона рамки. Найдите сторону квадрата, если в рамке за время пересечения области поля выделилось 6,4 мДж тепла.

Публикацию подготовили  
Т.Медина, Г.Никулин, А.Симонов

Российский государственный университет нефти и газа им.И.М.Губкина

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Упростите выражение

$$\frac{0,064 - 125b^3}{0,16 + 2b + 25b^2} + 5b.$$

2. Решите уравнение

$$(\sqrt{68 + x} - 9)(\sqrt{68 + x} + 5) = -13.$$

3. Найдите третий член геометрической прогрессии, если известно, что ее пятый член равен 0,5 и знаменатель прогрессии равен 0,5.

4. Найдите наименьшее целое решение неравенства

$$|x - 7,5| < 10.$$

5. Сколько целых решений имеет неравенство

$$0,37^{5x^2 - 17,1} > 12,1^{x^2 - 3,42}?$$

6. Вычислите

$$\log_{7,3} \sqrt[5]{8} : \log_{7,3} \sqrt[20]{8}.$$

7. Найдите наибольшее отрицательное число  $x$ , не входящее в область определения функции

$$y = \operatorname{ctg}(4\pi x + 1,6\pi).$$

8. Найдите в градусах наибольший отрицательный корень уравнения

$$\sin 3x + \sin 13x = 7 \sin 8x.$$

9. Прямая, проходящая через начало координат, пересекает график функции  $y = \frac{3\sqrt{3}}{4096x^3}$  в точках  $M$  и  $N$ .

Найдите наименьшее возможное значение длины отрезка  $MN$ .

10. Сколько целых чисел входит в область решений неравенства

$$\log_2 \left( \frac{5x + 8}{2x - 3} + 2 \right) > 2?$$

11.  $ABCD$  – ромб с острым углом  $BAD$ . Окружность, проходящая через вершину  $B$  и середины сторон  $CD$  и  $AD$ , пересекает диагональ  $BD$  в точке

$E$  такой, что  $ED : BE = 1 : 7$ . Найдите  $\cos \angle BAD$ .

12.  $ABCD$  – равнобедренная трапеция с большим основанием  $AD$  и меньшим  $BC$ , в которую можно вписать окружность. Известно, что  $\cos \angle BAD = 0,4$ , а объем тела, получающегося при вращении трапеции вокруг стороны  $BC$ , равен 17. Найдите объем тела, получающегося при вращении трапеции вокруг стороны  $AD$ .

Вариант 2

1. Упростите

$$\frac{a^6 + 0,001}{a^4 - 0,1a^2 + 0,01} - \frac{a^4 - 0,01}{a^2 + 0,1}.$$

2. Найдите наибольшее целое число, не входящее в область определения функции

$$y = \log_{0,1}(x^2 - 3x - 10).$$

3. Сумма первых 12 членов арифметической прогрессии равна 198. Найдите разность прогрессии, если ее первый член равен 33.

4. Решите уравнение

$$3|x| + 5x + 16 = 0.$$

5. Решите уравнение

$$(\sqrt{17})^{x-5} = (\sqrt[3]{18})^{x-5}.$$

6. Вычислите

$$(0,04)^{\log_{125} 0,4 \sqrt{0,4}}.$$

7. Вычислите

$$\frac{\cos^2 40^\circ + \cos^2 50^\circ}{\sqrt{3} \operatorname{ctg} 30^\circ + 1}.$$

8. Найдите в градусах наибольший отрицательный корень уравнения

$$\cos 25x + \cos 5x = 9 \cos 10x.$$

9. На параболе

$$y = ax^2 + bx + 2$$

существует единственная точка  $M$ , обладающая тем свойством, что если в этой точке провести касательную к параболе, то отрезок этой касательной, заключенный между координатными осями, делится точкой  $M$  пополам. Найдите ординату вершины параболы.

10. Сколько целых решений имеет неравенство

$$|x|^{x^2 + 2x - 120} < 1?$$

11. В трапеции  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$  и прямым углом  $BAD$  через точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  проведена окружность, которая пересекает основание  $AD$  в точке  $M$  и боковую сторону  $CD$  в точке  $N$ . Известно, что  $AM : MD =$

$= 2 : 3$ ,  $CN : ND = 2 : 1$ . Найдите  $\text{tg} \angle CDA$ .

12. Площадь основания  $ABCD$  правильной четырехугольной пирамиды  $SABCD$  равна 288, радиус вписанного в нее шара равен 6. Найдите радиус шара, вписанного в пирамиду  $SABC$ .

## ФИЗИКА

### Письменный экзамен

*Внимание!* Если единицы измерения не указаны, выразите ответ в единицах СИ. Ускорение свободного падения считайте равным  $10 \text{ м/с}^2$ .

### Вариант 1

1. Тело брошено горизонтально. Через 3 с после броска угол между направлениями полной скорости и полного ускорения стал равным  $60^\circ$ . Определите величину полной скорости тела в этот момент времени.

2. Небольшой шарик массой 350 г, прикрепленный к концу нити, равномерно вращается в вертикальной плоскости. На сколько ньютонов сила натяжения нити в нижней точке траектории больше, чем в верхней?

3. Тело массой 1,5 кг скользит по горизонтальной плоскости под действием горизонтально направленной силы. Коэффициент трения тела о плоскость 0,2. Определите энергию, выделяемую в виде тепла на пути 20 м.

4. Сосуд кубической формы с ребром 20 см до краев заполнен водой. Определите силу давления воды на боковую грань сосуда. Атмосферное давление не учитывайте. Плотность воды  $1000 \text{ кг/м}^3$ .

5. Определите начальную температуру (в  $^\circ\text{C}$ ) куска олова массой 1,2 кг, если при опускании его в воду массой 3 кг при температуре  $10^\circ\text{C}$  вода нагрелась на 2 К. Удельная теплоемкость олова  $250 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{K)}$ , воды  $4200 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{K)}$ .

6. Батарея с ЭДС, равной 10 В, имеет внутреннее сопротивление 2 Ом. При каком внешнем сопротивлении сила тока в цепи будет равна 2 А?

7. Магнитный поток через каждый виток катушки, помещенной в магнитное поле, равен 0,2 Вб. Магнитное поле равномерно убывает до нуля за время 0,4 с, при этом в катушке индуцируется ЭДС, равная 15 В. Сколько витков имеет катушка?

8. Найдите период (в микросекундах) колебаний контура, излучающего электромагнитную волну, длина которой 600 м. Скорость света равна  $3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ .

9. При посадке на планету, лишенную атмосферы, космический корабль

сначала облетает ее на малой высоте с выключенными двигателями. Затем он уменьшает скорость на 20%, и при новом режиме облета расход реактивного топлива составляет 3 кг/с. Каким будет расход топлива при уменьшении скорости облета еще вдвое? Скорость выброса газов постоянна.

10. Давление трех молей идеального газа в изохорном процессе уменьшилось в 1,5 раза, а затем в изобарном процессе его температуру довели до начального значения. При этом газ совершил работу 4980 Дж. Определите начальную температуру газа (в  $^\circ\text{C}$ ). Универсальная газовая постоянная равна  $8300 \text{ Дж/(кмоль}\cdot\text{K)}$ .

11. Два одинаковых шарика, несущие разноименные заряды одинаковой величины и соединенные непроводящей пружиной жесткостью  $15 \text{ Н/м}$ , находятся на гладком горизонтальном столе. Шарики колеблются так, что расстояние между ними меняется от  $L$  до  $4L$ , где  $L = 3 \text{ см}$ . Найдите величину заряда на каждом шарике (в нКл), если известно, что в недеформированном состоянии длина пружины равна  $3L$ . Коэффициент в законе Кулона равен  $k = 9 \cdot 10^9 \text{ м/Ф}$ .

12. Во сколько раз уменьшился радиус орбиты электрона при переходе атома из одного стационарного состояния в другое, если линейная скорость электрона увеличилась при этом в 4 раза?

### Вариант 2

1. Торможение автомобиля до полной остановки заняло 5 с и происходило с постоянным ускорением  $4 \text{ м/с}^2$ . Найдите тормозной путь.

2. На сколько процентов уменьшится сила тяготения между двумя одинаковыми однородными шарами, если вначале шары соприкасались друг с другом, а затем один из шаров отодвинули на расстояние, равное трем радиусам шаров?

3. Однородное тело объемом  $0,0003 \text{ м}^3$  плавает в жидкости, плотность которой в 5 раз больше плотности материала тела. Какой объем тела (в  $\text{см}^3$ ) будет выступать над поверхностью жидкости?

4. Газ охладил при постоянном давлении от  $127^\circ\text{C}$  до  $27^\circ\text{C}$ . На сколько процентов надо после этого уменьшить давление газа в изотермическом процессе, чтобы объем стал равен первоначальному?

5. Два плоских воздушных конденсатора, первый заряженный до напряжения 42 В, а второй незаряженный, соединили параллельно, после чего напряжение на конденсаторах

стало 7 В. Во сколько раз расстояние между пластинами у второго конденсатора меньше, чем у первого, если площади их пластин одинаковы?

6. По проводнику сопротивлением 17 Ом пропускали постоянный ток в течение 9 с. Какое количество теплоты выделилось в проводнике за это время, если через его сечение прошел заряд, равный 3 Кл?

7. Какова должна быть длина (в см) математического маятника на Луне, чтобы период его колебаний был таким же, как период колебаний математического маятника длиной 54 см на Земле? Ускорение силы тяжести на Луне в 6 раз меньше, чем на Земле.

8. Расстояние от предмета до собирающей линзы в 1,5 раза больше фокусного. Во сколько раз больше фокусного расстояние от изображения до линзы?

9. Определите массу груза, который надо сбросить с аэростата общей массой 500 кг, движущегося равномерно вниз, чтобы он стал подниматься с такой же по величине скоростью. Подъемная сила равна 4,5 кН, сила сопротивления пропорциональна скорости аэростата.

10. Невесомый стержень, на концах которого закреплены грузы массами 1 кг и 3 кг, может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через его середину. Стержень приводят в горизонтальное положение и отпускают. С какой силой он будет действовать на ось, проходя вертикальное положение?

11. Трансформатор, погруженный в масло, вследствие перегрузки начинает греться. Каков его КПД (в процентах), если при полной мощности 10 кВт масло массой 30 кг нагревается на  $20^\circ\text{C}$  за 5 мин работы трансформатора? Удельная теплоемкость масла  $2000 \text{ Дж/(кг}\cdot\text{K)}$ .

12. Отрицательно заряженная частица влетает в область однородного магнитного поля с индукцией 0,002 Тл, где движется по дуге окружности радиусом 0,2 м. Затем частица попадает в электрическое поле, где пролетает участок с разностью потенциалов 600 В, при этом ее скорость уменьшается в 2 раза. Определите конечную скорость (в км/с) частицы.

*Публикацию подготовили  
Б.Писаревский, А.Черноуцан*

Санкт-Петербургский  
государственный университет

## МАТЕМАТИКА

## Письменный экзамен

## Вариант 1

(факультеты математико-механический, прикладной математики – процессов управления; дневное отделение)

1. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых уравнение

$$\sqrt{9-x^2} = a + \sqrt{x^2-ax}$$

имеет два решения.

2. Решите уравнение

$$\operatorname{tg} \left| \frac{\pi}{6} - x \right| = \operatorname{tg} 3x.$$

3. Решите неравенство

$$\log_2(x^2 - 5x) - \log_2(2x^2 - 3x) \leq \leq \log_2(x + 3).$$

4. Точка  $O$  является общим центром двух окружностей. Вершины треугольника  $ABC$  лежат на внешней окружности. Две его стороны касаются внутренней окружности, а третья сторона пересекает ее в точках  $M$  и  $N$ . Найдите отношение радиусов этих окружностей, если известно, что  $\angle MON = \varphi$ .

5. Две треугольные пирамиды  $NABC$  и  $MABC$  имеют общее основание  $ABC$  и не имеют других общих точек. Все вершины обеих пирамид лежат на одной и той же сфере. Найдите длины ребер  $MA$  и  $MB$ , если известно, что они равны между собой и что длины всех остальных ребер обеих пирамид равны единице.

## Вариант 2

(экономический факультет; дневное отделение)

1. Найдите число  $x < -20$ , если известно, что оно является седьмым членом некоторой бесконечной арифметической прогрессии, сумма первых семнадцати членов которой равна 51, а число  $-6x$  также является членом этой прогрессии.

2. Решите уравнение

$$\left| x - \frac{\pi}{3} \right| = \cos 2x.$$

3. Решите неравенство

$$\log_2(10x - 8)(\log_x 2x - \log_2 x^2) \geq 0.$$

4. Решите уравнение

$$\sqrt{2x+3} + \sqrt{3x} = 3\sqrt{x+1}.$$

5. В четырехугольнике  $ABCD$  углы при вершинах  $A$  и  $C$  прямые. Биссектриса угла  $B$  пересекает сторону  $CD$  в точке  $M$ , а биссектриса угла  $D$  пересекает сторону  $AB$  в точке  $N$ . Известно, что  $BM = 10$ ,  $AN = 6$  и  $BN = 2$ . Найдите  $CM$  и  $DM$ .

## Вариант 3

(биолого-почвенный факультет; вечернее отделение)

1. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых система

$$\begin{cases} x(x+y) = a, \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$$

имеет решение.

2. Решите уравнение

$$\frac{x+4}{2-\sqrt{x+2}} = \frac{3}{2}.$$

3. Решите неравенство

$$\log_{1+\sin 2x}(x+4-2x^2) \leq 0.$$

4. В прямоугольник  $ABCD$  площади  $S$  помещена окружность, касающаяся сторон  $AB$ ,  $BC$  и  $AD$ . Найдите радиус этой окружности, если известно, что ее хорда, лежащая на диагонали  $AC$  прямоугольника, равна  $c$ .

5. Постройте график функции

$$f(x) = \frac{|x^2 - 2x|}{x} + |x|.$$

Публикацию подготовили  
О.Иванов, А.Орлов, Ю.Чурин

Санкт-Петербургский  
государственный технический  
университет

## МАТЕМАТИКА

## Вариант 1

(физико-технический факультет)

1. Сумма ненулевого числа  $A$  и 20% от числа  $B$  составляет 50% от  $B$ . Найдите отношение  $A/B$ .

2. Решите уравнение

$$2^{2x} \cdot 3^{4x} = 18^{x-1}.$$

3. Вычислите

$$(1 + 2 \sin 240^\circ)(1 - 2 \cos 240^\circ).$$

Установите, что это число – целое.

4. Вычислите

$$\log_3 5 \cdot \log_5 4 - \log_3 12.$$

5. Решите уравнение

$$5 - \sqrt{x-4} = 4(x-4).$$

6. Решите уравнение

$$\sqrt{x \cdot 2^{-x}} = \sqrt{8x}.$$

7. Решите уравнение

$$\log_x(x^3 - 2x^2 + 2) = 0.$$

8. Вычислите  $\arcsin(\sin 6)$ .

9. Найдите  $x + 1/x$ , если

$$(x^2 + 1)(x^2 + x + 1) = 2x^2.$$

10. Решите уравнение

$$|x + 1| \cos x = 2x |\cos x|.$$

11. Найдите меньший корень уравнения

$$\lg^2 x + \lg(\sqrt{10}/x) = 2,5.$$

12. Решите неравенство

$$(x^3 - 1)(x^4 - 1) \leq 0.$$

13. Решите неравенство

$$(x + 4) \log_2(4 - x) \leq 0.$$

14. Найдите общие корни уравнений

$$\sin \pi x = 2x \text{ и } \cos \pi x = 4x^2 - 1.$$

15. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y = 5, \\ x\sqrt{y} - y = 1. \end{cases}$$

16. Первый член геометрической прогрессии равен  $b_1 = 1$ . Найдите все целые отрицательные знаменатели  $q$  прогрессии, для которых сумма третьего и четвертого ее членов  $b_3 + b_4$  не меньше  $2q$ .

17. Найдите координаты центров окружностей, касающихся трех прямых линий  $y = x$ ,  $y = x + 2$  и  $y = -x$ .

18. В равнобедренном треугольнике длина основания  $a = 4$ , а длина медианы, опущенной на боковую сторону,  $m = 5$ . Найдите площадь треугольника.

19. В основании треугольной пирамиды лежит прямоугольный треугольник с катетом  $a = 3$  и противлежащим углом  $\alpha = \operatorname{arctg}(3/4)$ . Найдите объем пирамиды, если все боковые ребра имеют одинаковую длину  $l = 5$ .

20. При каких значениях параметра  $a$  уравнение  $x^2 - ax = 2a$  имеет два различных целочисленных решения?

Публикацию подготовили  
Е.Подсытанин, С.Преображенский