Решения задач М1741—М1750, Ф1758–Ф1762

М1741. *С каждым из чисел от 000000 до 999999 поступим следующим образом: умножим первую цифру на 1, вторую на 2 и так далее, последнюю – на 6. Сумму полученных шести чисел назовем характеристикой исходного числа. Сколько чисел имеют характеристику, делящуюся на 7?*

Числа 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000 имеют различные остатки от деления на 7. Поэтому, если бы мы при подсчете характеристики множили последнюю цифру на 1, предпоследнюю на 10,…, первую на 10000, то ничего бы не изменилось. А при таком подсчете каждое число совпадает со своей характеристикой.

Количество чисел от 0 до 999999, которые делятся на 7, равно $999999/7+1$. Это число дает ответ на вопрос задачи.

Н.Васильев, Б.Гинзбург

М1742. *Таблица размером $n\times n$ заполнена натуральными числами так, что всякие два числа, соседние по горизонтали или по вертикали, различаются на 1. Докажите, что найдется натуральное число, которое присутствует либо на каждой горизонтали, либо на каждой вертикали.*

В доказательстве будем опираться на факт дискретной непрерывности устройства нашей таблицы. Это означает, что если в какой-либо строке таблицы присутствуют два числа a и b $(a<b)$, то любое промежуточное натуральное число c, $a\le c\le b$, тоже присутствует в этой строке. Естественно, что такое замечание справедливо и для столбцов.

В каждой строке возьмем минимальное число, и из полученных n чисел выберем максимальное число M. Пусть M является минимальным числом k-й строки.

Убедимся в том, что число M присутствует либо в каждой строке, либо в каждом столбце.

Допустим, что в i-й строке отсутствует число M. Но тогда все числа i-й строки меньше M. Возьмем произвольный столбец и покажем, что в нем присутствует число M. На пересечении этого столбца и i-й строки стоит число a, меньшее M. На пересечении этого столбца и k-й строки стоит число b, большее M. Следовательно, число M, $a\le M\le b$, непременно присутствует в избранном столбце, а значит, и в любом столбце.

В.Произволов

М1743. *Найдите сумму*

$$\left[\frac{1}{3}\right]+\left[\frac{2}{3}\right]+\left[\frac{2^2}{3}\right]+\ldots+\left[\frac{2^{1000}}{3}\right]$$

($[a]$ – целая часть числа a).

Ответ: $\dfrac{2^{1001}-2}{3}-500$.

Достаточно найти сумму дробных частей

$$s_1=\left\{\frac{1}{3}\right\}+\left\{\frac{2}{3}\right\}+\ldots+\left\{\frac{2^{1000}}{3}\right\}.$$

Имеем: $\left\{\frac{1}{3}\right\}=\frac{1}{3}$, $\left\{\frac{2}{3}\right\}=\frac{2}{3}$, $\left\{\frac{4}{3}\right\}=\frac{1}{3}$, $\left\{\frac{8}{3}\right\}=\frac{2}{3}$, … Следовательно,

$$s_1=501\cdot\frac{1}{3}+500\cdot\frac{2}{3}=500\frac{1}{3}.$$

Далее,

$$s=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\ldots+\frac{2^{1000}}{3}=\frac{1}{3}\left(2^{1001}-1\right).$$

Получили:

$$s_2=\left[\frac{1}{3}\right]+\left[\frac{2}{3}\right]+\ldots+\left[\frac{2^{1000}}{3}\right]=s-s_1=\frac{1}{3}\left(2^{1001}-2\right)-500.$$

А.Голованов, В.Сендеров

М1744*. *На прямоугольном столе лежат равные картонные квадраты k различных цветов со сторонами, параллельными сторонам стола. Если рассмотреть любые k квадратов различных цветов, то какие-нибудь два из них можно прибить к столу одним гвоздем. Докажите, что все квадраты некоторого цвета можно прибить к столу $2k-2$ гвоздями.*

Докажем утверждение задачи индукцией по количеству цветов n.

База: $n = 2$. Рассмотрим самый левый квадрат K. Если он первого цвета, то все квадраты второго цвета имеют с ним общую точку, следовательно, каждый квадрат второго цвета содержит одну из двух правых вершин квадрата K, значит, все квадраты второй системы можно прибить двумя гвоздями.

Индукционный переход. Пусть мы доказали утверждение задачи для n цветов, докажем для $(n+1)$-го цвета. Рассмотрим все квадраты и выберем из них самый левый квадрат K. Пусть он покрашен в $(n+1)$-й цвет. Все квадраты, пересекающие K, содержат одну из двух его правых вершин, следовательно, их можно прибить двумя гвоздями. Уберем со стола все квадраты $(n+1)$-го цвета и квадраты других цветов, пересекающие K. Остались квадраты n различных цветов. Нетрудно доказать, что если выбрать n квадратов разных цветов, то среди них найдутся два пересекающихся. (В противном случае можно добавить квадрат K и получить $n+1$ попарно не пересекающихся квадратов разных цветов, что противоречит условию задачи.) Таким образом, по индукционному предположению, можно выбрать один из цветов i и прибить $2k-2$ гвоздями все оставшиеся на столе квадраты этого цвета. Убранные квадраты цвета i пересекают самый левый квадрат K, следовательно, эти квадраты можно прибить, забив два гвоздя в правые вершины квадрата K.

В.Дольников

М1745. *В некоторых клетках доски $2n\times 2n$ стоят черные и белые фишки. С доски сначала снимаются все черные фишки, которые стоят в одной вертикали с какой-то белой, а затем все белые фишки, стоящие в одной горизонтали с какой-нибудь из оставшихся черных. Докажите, что либо черных, либо белых фишек на доске осталось не более n^2.*

Заметим, что в конце никакие две разноцветные фишки не стоят ни в одной строке, ни в одном столбце. Действительно, если исходно черная фишка стояла в одном столбце с белой, то ее сняли в первый раз, а если после первого снятия белая фишка стоит в одной строке с черной, то ее сняли во второй раз.

Пусть в конце черные фишки стоят в a строках и b столбцах, тогда белые могут стоять не более чем в $2n-a$ строках и $2n-b$ столбцах. Но тогда черных фишек не более ab, а белых не более $(2n-a)(2n-b)$. Поскольку

$$ab(2n-a)(2n-b) = a(2n-a)b(2n-b) \le n^2 \cdot n^2 = n^4,$$

то либо черных, либо белых фишек осталось не более n^2.

С.Берлов

М1746. *На окружности находятся n красных и n синих точек, которые разделяют ее на $2n$ равных дуг. Каждая красная точка является серединой дуги окружности с синими концами. Докажите, что каждая синяя точка является серединой дуги окружности с красными концами.*

Пусть A – произвольная синяя точка на окружности. Возможны два случая.

В первом случае точка B, диаметрально противоположная точке A, является тоже синей. Тогда среди хорд, перпендикулярных диаметру AB, найдется хорда CD с красными концами. Иначе получилось бы, что синих точек на окружности больше, чем красных. В таком случае дуга CAD имеет красные концы, а точка A является серединой этой дуги.

Во втором случае точка B, диаметрально противоположная точке A, является красной точкой. Из условия следует, что найдется хорда с синими концами MN, перпендикулярная диаметру AB. Но тогда, ввиду баланса синих и красных точек на окружности, найдется хорда CD с красными концами, перпендикулярная диаметру AB. Это означает, что дуга CAD имеет красные концы, но точка A является ее серединой.

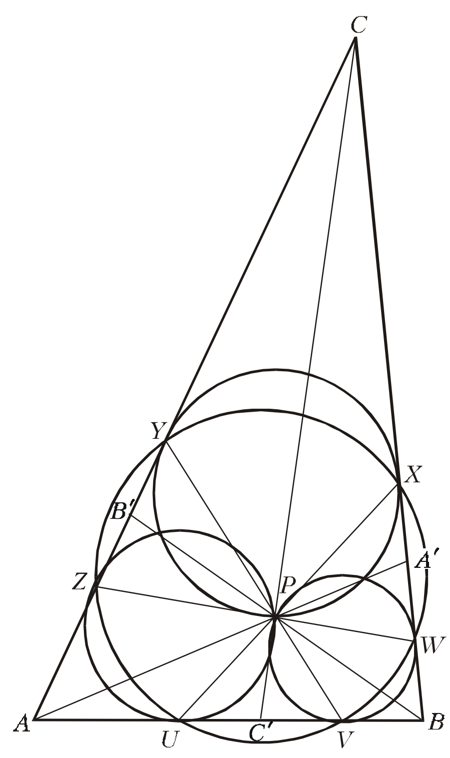
В.Произволов

М1747*. *Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон в точках A', B', C'. Через точку P пересечения прямых AA', BB', CC' проведены три окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника. Докажите, что*

а) шесть точек касания образуют вписанный шестиугольник, причем центр описанной около него окружности совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник ABC;

б) главные диагонали этого шестиугольника пересекаются в точке P;

в) вторые точки пересечения проходящих через P окружностей лежат на прямых AA', BB', CC'.



Пусть U, V, W, X, Y, Z – точки касания окружностей со сторонами треугольника ABC (см. рисунок). Из условия задачи следует, что окружности PZU, PVW, PXY гомотетичны вписанной окружности треугольника ABC с центрами гомотетий A, B, C и коэффициентами AP/AA', BP/BB', CP/CC' соответственно. Отсюда сразу следует, что отрезки $A'B'$, XY, PZ, PW параллельны, что доказывает пункт б). Так как площади треугольников PAB, PBC, PCA относятся как $1/(p-c)$: $1/(p-a)$: $1/(p-b)$, где p – полупериметр ΔABC, то

$$CP/CC' = (S_{ABC} - S_{ABP})/S_{ABC} =$$
$$= c(p-c)/\left((p-a)(p-b)+(p-b)(p-c)+(p-c)(p-a)\right).$$

Отсюда легко выводится, что

$$PZ \cdot PW = PX \cdot PU = PY \cdot PV,$$

т.е. точки X, U, Z, W лежат на одной окружности. Но $XYZW$ – равнобедренная трапеция, следовательно, точка Y лежит на той же окружности. Для точки V доказательство аналогично. Центр этой окружности лежит на серединных перпендикулярах к отрезкам XY, ZU, VW, совпадающих с биссектрисами углов ΔABC, что доказывает пункт а).

Для доказательства пункта в) достаточно заметить, что отрезки CZ и CW равны, и следовательно, точка C лежит на радикальной оси окружностей PZU и PVW.

Другое решение можно получить с помощью инверсии: так как касательные к окружностям в точке P параллельны сторонам ΔABC, инверсия с центром в P переводит эти окружности в прямые, образующие треугольник, гомотетичный ΔABC относительно P. Радиус инверсии можно выбрать таким, чтобы коэффициент гомотетии равнялся -1. Тогда композиция этой инверсии и центральной симметрии с центром P будет менять местами точки X и U, Y и V, Z и W, а также точки A, B, C и вторые точки пересечения окружностей. Отсюда сразу следуют все утверждения задачи.

А.Заславский

М1748. *На плоскости выбраны 1000 точек общего положения (никакие 3 не лежат на одной прямой). Рассматриваются всевозможные раскраски этих точек в два цвета. Назовем раскраску неразделимой, если не существует такой прямой, что точки разных цветов лежат в разных полуплоскостях. Докажите, что число неразделимых раскрасок не зависит от выбора точек.*

Общая идея состоит в том, что мы будем искать не число различных неразделимых раскрасок, а число по-разному разделяющих прямых.

Назовем две прямые эквивалентными, если они разбивают множество выбранных точек на совпадающие непустые подмножества. Легко видеть, что это действительно отношение эквивалентности. Найдем число классов эквивалентности.

Для этого удобно представлять себе выбранные точки как бесконечно тонкие гвозди, торчащие из плоскости, а прямую – как палку, лежащую на плоскости (естественно, тоже бесконечно тонкую и прямую!). Начнем поворачивать палку по часовой стрелке, пока это возможно (палка не может проходить сквозь гвозди). Сначала поворачиваем вокруг любой точки прямой, пока не коснемся одного гвоздя. Потом поворачиваем ее вокруг этого гвоздя, пока не коснемся второго. Если эти два гвоздя в одной полуплоскости, то прямую можно поворачивать дальше вокруг второго гвоздя – при этом она уйдет от первого. Продолжаем поворачивать до следующего касания, и так далее...

Если два гвоздя в разных полуплоскостях, то они «зажали» прямую – дальше ее поворачивать нельзя. Таким образом, для каждой прямой мы получили некоторую пару выбранных точек. Очевидно следующее:

1) эквивалентным прямым соответствует одна и та же пара точек;

2) каждой паре точек соответствует некоторый класс эквивалентности прямых;

3) разным классам эквивалентности соответствуют разные пары точек.

Значит, классов эквивалентности столько же, сколько пар точек, т.е. $1000 \cdot 1001/2$. Они разделяют 1001000 раскрасок (каждая разделяет ровно две), и еще 2 раскраски (когда все точки одного цвета) разделяются любой прямой.

Г.Челноков

М1749. *Рассмотрим последовательность слов, первое из которых состоит из одной буквы А, второе – АБ, третье – АБА, четвертое – АБААБ, пятое – АБААБАБА, и так далее: очередное слово получаем из предыдущего, заменяя каждую букву А на АБ, а Б – на А.*

а) Докажите, что каждое слово этой последовательности, начиная с третьего, получается приписыванием предпредыдущего слова к предыдущему.

(Например, АБААБАБА – это АБААБ плюс АБА.)

б) Пусть $a_1 = 1$, $b_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 4$, $b_2 = 5$, $a_4 = 6$, $b_3 = 7$, $a_5 = 8$, $a_6 = 9$, $b_4 = 10$ и, вообще, пусть a_n и b_n – номера мест, на которых стоят n-е буквы А и Б в бесконечном слове АБААБАБААБААБАБА..., начальными отрезками которого являются слова пункта а). Докажите равенство $b_n = n + a_n$.

в) Рассмотрим другую последовательность слов: А, АБ, АБАА, АБАААБАБ, АБАААБАБАБАААБАА, ... (Очередное слово получается из предыдущего заменой А на АБ, а Б – на АА.) Докажите, что каждое слово этой последовательности является началом следующего ее слова и что номер места, на котором в соответствующем бесконечном слове

АБАААБАБАБАААБАААБАААБАБАБАААБАБ...

стоит n-я буква Б, в два раза больше номера места, на котором стоит n-я буква А.

а) Обозначим: $w_1 = А$, $w_2 = АБ$, $w_3 = АБА$ и, вообще, $w_{n+1} = h(w_n)$, где h обозначает одновременную замену всех букв $А$ на $АБ$, а $Б$ на $А$. Мы должны доказать соотношение

$$w_{n+2} = w_{n+1} w_n.$$

Применим индукцию. При $n = 1$ утверждение верно: $w_3 = АБА = w_2 w_1$.

Пусть мы знаем, что оно верно при некотором n. Тогда

$$w_{n+3} = h(w_{n+2}) = h(w_{n+1}w_n) = h(w_{n+1})h(w_n) = w_{n+2}w_{n+1},$$

что и требовалось доказать.

б) Очевидно,

$$a_n = n + k,$$

где k – это количество букв $Б$, расположенных перед n-й буквой $А$. Далее, n-я буква $Б$ получается при операции h из n-й буквы $А$. Поскольку h преобразует каждую букву $А$ в две буквы ($А$ и $Б$), а каждую букву $Б$ – в одну букву ($А$), то

$$b_n = 2n + k.$$

Дальнейшее очевидно: $b_n - a_n = 2n + k - (n + k) = n$.

Замечание. В статье А.Баабабова «Пентиум» хорошо, а ум лучше» («Квант» №4 за 1999 год) доказаны явные формулы:

$$a_n = \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}n\right] \text{ и } b_n = \left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}n\right].$$

в) Обозначим n-е слово рассматриваемой последовательности через w_n (т.е. $w_1 = A$, $w_2 = AБ$, $w_3 = AБAA$ и т.д.). Пусть h обозначает одновременную замену всех букв A на $AБ$, а всех букв $Б$ – на AA. Докажем по индукции равенство

$$w_{n+2} = w_{n+1} w_n w_n. \qquad (\&)$$

(Например,

$$w_5 = AБAAAБAБAБAAAБAA$$

– это $w_4 = AБAAAБAБ$, к которому дважды приписано слово $w_3 = AБAA$.)

База индукции. Слово $AБAA$ – это $AБ$, к которому приписаны две буквы A.

Индукционный переход. Если для некоторого n верно равенство (&), то

$$w_{n+3} = h(w_{n+2}) = h(w_{n+1} w_n w_n) =$$
$$= h(w_{n+1}) h(w_n) h(w_n) = w_{n+2} w_{n+1} w_{n+1},$$

что и требовалось доказать.

Итак, каждое слово w_n является началом следующего за ним слова w_{n+1}, так что существует бесконечное слово, началами которого являются все слова w_n.

А теперь заметьте: n-я буква $Б$ получается преобразованием h из n-й буквы A. Поскольку h превращает каждую букву в две, то номер места, на котором в бесконечном слове $AБAAAБAБAБAAAБAAAБAAAБAБAБAAAБAБ\ldots$ стоит n-я буква $Б$, в два раза больше номера места, на котором стоит n-я буква A.

Замечание. Если начать с одной буквы A и производить одновременные замены $A \mapsto A^k Б A^l$ и $Б \mapsto A^m$, где k, m – натуральные числа, l – неотрицательное целое число, то по индукции легко доказать соотношение

$$w_{n+2} = w_{n+1}^k w_n^m w_{n+1}^l,$$

так что и в этом случае возникает бесконечное слово. Его n-я буква $Б$ тоже получается из n-й буквы A. Поскольку среди первых a_n букв имеется n букв A и $a_n - n$ букв $Б$ и поскольку при рассматриваемой замене каждая буква A переходит в $k + 1 + l$ букв, а $Б$ – в m букв, то первые a_n букв переходят в $(k+1+l)n + m(a_n - n)$ букв. Для нахождения b_n осталось заметить, что в слове $A^k Б A^l$ буква $Б$ расположена не на последнем, а на $(l+1)$-м месте от конца. Поэтому

$$b_n = (k+1+l)n + m(a_n - n) - l.$$

Неожиданно, не правда ли? Есть ли еще замены, приводящие к интересным аналогичным законам, мы не знаем. Возможно, читатели помогут найти ответ на этот вопрос.

Е.Барский, А.Баабабов, Л.Коганов

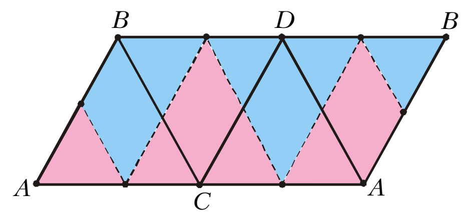
М1750. *а) Взяли шесть бумажных квадратов, у каждого из которых длина стороны равна 1, и ими целиком оклеили поверхность куба с ребром 1. Докажите, что найдется бумажный квадрат, который целиком оклеил какую-либо грань куба.*

б) Четырьмя бумажными равносторонними треугольниками, у каждого из которых длина стороны равна 1, целиком оклеили поверхность правильного тетраэдра с ребром 1. Обязательно ли найдется бумажный треугольник, который целиком оклеил какую-либо грань тетраэдра?

а) Обратим внимание на какую-либо, все равно какую, вершину куба. Так как сумма углов при ней равна 270°, найдется бумажный квадрат (хотя бы один), вершина которого совпала с этой вершиной куба.

Одним словом, у куба восемь вершин, и значит, не меньше восьми вершин у шести оклеивающих его бумажных квадратов совпадают с вершинами куба. Откуда следует, что найдется бумажный квадрат, у которого по крайней мере две вершины совпадают с вершинами куба. Но тогда ясно, что все четыре вершины этого бумажного квадрата совпадают с четырьмя вершинами какой-либо грани куба, т.е. эта грань целиком оклеена бумажным квадратом.

Можно дополнительно сообразить, что противоположная ей грань тоже непременно целиком оклеена каким-либо бумажным квадратом.



б) Вовсе необязательно. На рисунке показана развертка правильного тетраэдра $ABCD$ и такая его оклейка, что никакой из четырех бумажных треугольников не оклеивает целиком какую-либо грань этого тетраэдра.

В.Произволов

Ф1758. *Кот Леопольд стоял у края крыши сарая. Два злобных мышонка выстрелили в него из рогатки. Однако камень, описав дугу, через $t_1 = 1{,}2$ с упруго отразился от наклонного ската крыши сарая у самых лап кота и через $t_2 = 1{,}0$ с попал в лапу стрелявшего мышонка (рис.1). На каком расстоянии s от мышей находился кот Леопольд?*

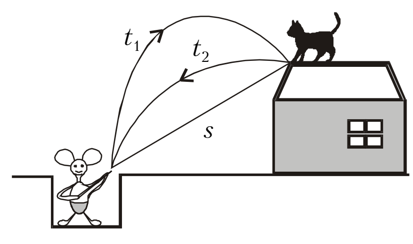


Рис.1

Пусть $\vec{u}_0$ – начальная скорость камня, $\vec{u}_1$ – скорость отскока камня от крыши и $\vec{u}_2$ – скорость, с которой камень попал в лапу мышонка. Направим ось X параллельно скату крыши, а ось Y – перпендикулярно ей (рис.2). На движении камня по оси X удар о крышу никак не сказывается; следовательно, оно равноускоренное и при этом $|u_{0x}| = |u_{2x}|$. Уравнению

$$s_x = u_{0x}t + \frac{g_x t^2}{2},$$

где g_x – проекция вектора ускорения свободного падения на ось X,

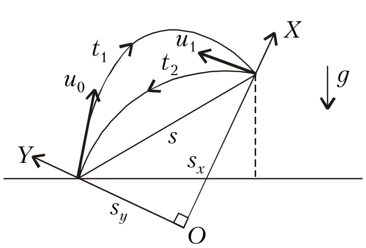


Рис.2

удовлетворяет не только истинное движение камня вверх, но и обращенное во времени движение камня вниз, поэтому t_1 и t_2 – его корни. По теореме Виета получаем

$$s_x = -\frac{g_x t_1 t_2}{2}.$$

Аналогично, как истинное движение камня вниз, так и обращенное во времени его движение вверх удовлетворяют уравнению

$$s_y = u_{1y}t + \frac{g_y t^2}{2},$$

где u_{1y} – проекция на ось Y скорости камня сразу после отскока от крыши. В соответствии с теоремой Виета,

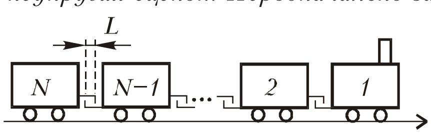
$$s_y = -\frac{g_y t_1 t_2}{2}.$$

Тогда искомое расстояние равно

$$s = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} = \frac{g t_1 t_2}{2}.$$

Д.Александров, В.Слободянин

Ф1759. *Длинный товарный поезд трогается с места. Вагоны соединены друг с другом с помощью абсолютно неупругих сцепок. Первоначально зазор в каждой сцепке равен L (см. рисунок). Масса локомотива m, а его порядковый номер первый. Все вагоны загружены, и масса каждого из них тоже m.*



1) Считая силу тяги локомотива постоянной и равной F, найдите время, за которое в движение будет вовлечено N вагонов.

2) Полагая, что состав очень длинный ($N \to \infty$), определите предельную скорость v_∞ локомотива.

1) Пусть v_i' – скорость части состава из i вагонов сразу после вовлечения в движение i-го вагона, а v_i – скорость части состава из i вагонов перед ударом с $(i+1)$-м вагоном. Из закона сохранения импульса

$$(i+1)mv_{i+1}' = imv_i = p_i.$$

По второму закону Ньютона

$$a_{i+1} = \frac{F}{(i+1)m},$$

а по известному кинематическому соотношению

$$a_{i+1}L = \frac{v_{i+1}^2 - v_{i+1}'^2}{2}.$$

Отсюда получим

$$v_{i+1}^2 = \frac{2FL}{(i+1)m} + \left(\frac{i}{i+1}\right)^2 v_i^2,$$

или

$$p_{i+1}^2 = 2(i+1)mFL + p_i^2.$$

Из этой рекуррентной формулы следует

$$p_N^2 = 2mFL\sum_{i=1}^{N} i + p_0^2,$$

или, так как $p_0 = 0$,

$$p_N^2 = 2mFL\frac{N(N+1)}{2},$$

откуда

$$v_N = \sqrt{\frac{FL}{m}}\sqrt{\frac{N+1}{N}}.$$

Найдем теперь время t_N вовлечения в движение N вагонов:

$$v_i - v_i' = a_i \Delta t_i,$$

$$\Delta t_i = \frac{v_i - v_i'}{a_i} = \frac{m}{F}\left(iv_i - iv_i'\right) = \frac{m}{F}\left(iv_i - (i-1)v_{i-1}\right),$$

$$t_N = \frac{m}{F}\sum_{i=1}^{N-1}\left(iv_i - (i-1)v_{i-1}\right) =$$

$$= \frac{m}{F}\left((N-1)v_{N-1} - 0\cdot v_0\right) = \frac{m}{F}v_{N-1}(N-1).$$

Используя полученное ранее выражение для v_N, окончательно получим

$$t_N = \sqrt{\frac{mL}{F}}N\sqrt{1-\frac{1}{N}}.$$

2) Из выражения для v_N находим, что при $N \to \infty$ скорость состава $n_\infty \to \sqrt{FL/m}$.

П.Бойко, Ю.Полянский

Ф1760. *К двум точкам A и B, находящимся на одной горизонтали, между которыми расстояние 2a, прикреплена тонкая легкая нерастяжимая нить длиной 2l (рис.1). По нити без трения скользит маленькая тяжелая бусинка. Ускорение свободного падения g.*

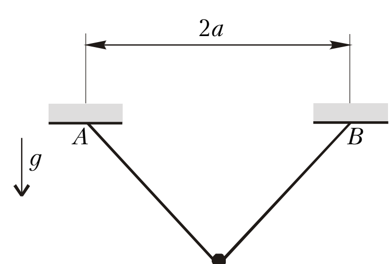


Рис.1

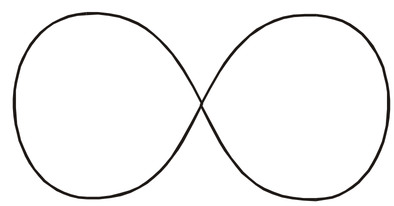


Рис.2

1) Найдите частоту малых колебаний бусинки $\omega_\perp$ в плоскости, перпендикулярной отрезку, соединяющему точки крепления нити.

2) Найдите частоту малых колебаний бусинки $\omega_\parallel$ в вертикальной плоскости, проходящей через точки крепления нити.

3) При каком отношении l/a траектория движения бусинки в проекции на горизонтальную плоскость может иметь вид, представленный на рисунке 2?

Примечание: при решении задачи вам может оказаться полезной формула

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \ldots$$

при x? 1.

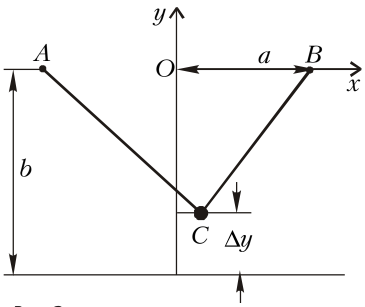


Рис.3

1) В первом случае происходят колебания математического маятника с длиной подвеса $\sqrt{l^2-a^2}$, поэтому

$$\omega_{\perp} = \sqrt{\frac{g}{\sqrt{l^2-a^2}}}.$$

2) Так как нить нерастяжимая, $AC+CB=2l$ (см. рис.3). Следовательно, во втором случае бусинка C движется по эллипсу с фокусами A и B, при этом длина малой полуоси равна $b=\sqrt{l^2-a^2}$, большой полуоси – l. Уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{l^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

откуда

$$y=-b\sqrt{1-\frac{x^2}{l^2}} \approx -b+\frac{bx^2}{2l^2},$$

и

$$\Delta y \approx \frac{bx^2}{2l^2}.$$

Значит, потенциальная энергия маятника равна

$$E_p = mg\Delta y \approx \frac{1}{2}mgb\frac{x^2}{l^2}.$$

Таким образом,

$$\omega_{\parallel}^2 \approx \frac{gb}{l^2},$$

и

$$\omega_{\parallel} \approx \frac{\sqrt{g\sqrt{l^2-a^2}}}{l}.$$

3) Из рисунка 2 видно, что

$$\frac{\omega_{\perp}}{\omega_{\parallel}} \approx 2.$$

Отсюда получаем

$$\frac{l}{a} \approx \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

В.Пестун

Ф1761. *Высокий вертикальный сосуд с площадью дна 10 см^2 и высотой 1 м содержит под поршнем массой 2 кг сухой воздух и три одинаковые маленькие ампулы с водой. Температура воздуха снаружи +100 °С, атмосферное давление нормальное. Вначале поршень висит на высоте 20 см над дном сосуда, а после того, как одна из ампул лопнула, он поднялся и окончательно остановился на высоте 40 см. Сколько воды было в ампуле? Выскочит ли поршень из сосуда, если лопнут остальные две ампулы?*

Вначале, когда поршень неподвижен, давление воздуха в сосуде равно

$$p_{\text{атм}}+\frac{Mg}{S}=1{,}2\ \text{атм}.$$

После того, как одна ампула лопнула, объем воздуха удвоился, его давление упало в 2 раза и составило 0,6 атм. Следовательно, давление пара равно

$$p_{\text{п}} = 1{,}2\ \text{атм} - 0{,}6\ \text{атм} = 0{,}6\ \text{атм}.$$

Для температуры 100 °С это давление меньше давления насыщенных паров, равного 1 атм. Значит, испарилась вся вода, и ее масса равна

$$m=\frac{\mathrm{M}p_{\text{п}}V}{RT}=\frac{0{,}018\cdot 0{,}6\cdot 10^5\cdot 400\cdot 10^{-6}}{8{,}3\cdot 373}\ \text{кг} \approx 0{,}14\ \text{г}.$$

Для того чтобы поршень выскочил из сосуда, пар должен стать почти насыщенным – парциальное давление воздуха упадет в 5 раз и составит 1,2 атм/5 = 0,24 атм, тогда на пар должно приходиться 1,2 атм – 0,24 атм = 0,96 атм. Одна ампула при высоте поршня над дном сосуда 40 см создала влажность 60%, три ампулы при высоте поршня 1 м создадут влажность $1{,}2\cdot 60\% = 72\%$, что явно меньше необходимых 96%. Итак, трех ампул недостаточно.

А.Зильберман

Ф1762. *Найдите силу взаимодействия двух непроводящих полусфер радиусами R и r с зарядами Q и q соответственно, распределенными равномерно по поверхностям полусфер (рис.1). Центры и плоскости максимальных сечений полусфер совпадают.*

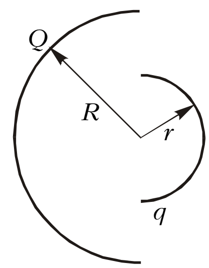


Рис.1

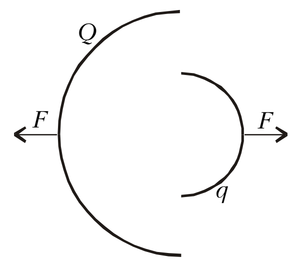


Рис.2

На рисунке 2 показаны направления сил, действующих на полусферы для случая одноименных зарядов. Если к системе добавить полусферу радиусом R и зарядом Q, как показано на рисунке 3, то сила, действующая на полусферу радиусом r, будет равна нулю, поскольку поле внутри заряженной сферы отсутствует. Таким образом, правая и левая половинки сферы действуют на маленькую полусферу с равными по величине и противоположно направленными силами F. Теперь добавим к первоначальным полусферам полусферу радиусом r с зарядом q (рис.4). Из предыдущего ясно, что полусферы с зарядами q будут действовать на полусферу с зарядом Q с равными по величине и сонаправленными силами F, так что сила взаимодействия сферы с зарядом $2q$ и радиусом r с

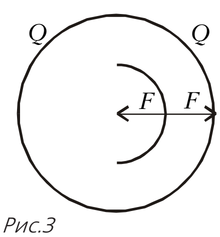


Рис.3

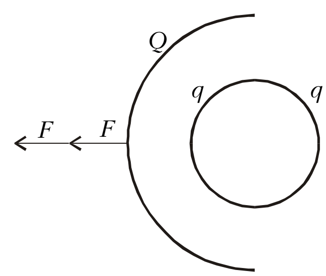


Рис.4

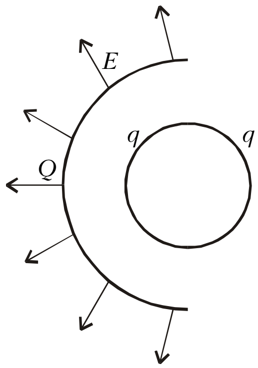


Рис.5

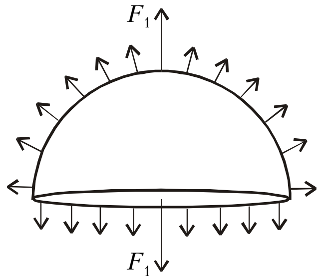


Рис.6

концентрической полусферой радиусом R и зарядом Q будет равна $2F$. Но эту силу легко вычислить, зная напряженность электрического поля на поверхности большой полусферы (рис.5):

$$E = k\frac{2q}{R^2},$$

а следовательно, можно вычислить и давление:

$$p = E\sigma,$$

где $\sigma = \dfrac{Q}{2\pi R^2}$ – поверхностная плотность заряда. Результирующая сила равна по величине силе давления на плоскость, замыкающую полусферу (рис.6):

$$F_1 = \pi R^2 p.$$

Принимая во внимание, что $F_1 = 2F$, получим

$$F = k\frac{qQ}{2R^2} = \frac{qQ}{8\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

Г.Григорян