XLI Международная математическая олимпиада

XLI Международная математическая олимпиада проходила с 13 по 25 июля 2000 года в Тэджоне (Южная Корея). Хозяева олимпиады блестяще подготовились к встрече гостей из 82 стран мира, поразив участников олимпиады яркими церемониями, интересными экскурсиями, гостеприимством и четкой организацией работы.

На церемонии открытия гостей приветствовал премьер-министр Кореи, участников олимпиады в своем дворце принимал президент страны, а завершилась олимпиада красочным фейерверком.

XLI ММО продемонстрировала высокий уровень российской математической олимпиадной школы. Каждая страна-участница может предложить до 6 задач, из которых формируется список лучших задач для рассмотрения Международным жюри. В этом году все 6 предложенных Россией задач попали в число 27 лучших, а три из них, впервые в истории, вошли в окончательный вариант олимпиады (задачи 1, 5, 6).

Команда России на XLI Международной математической олимпиаде

Большого успеха на олимпиаде добились школьники России: в двадцатку лучших попали 5 наших участников, в десятку – 3, а в числе четырех школьников, показавших на олимпиаде абсолютный результат, оказались 2 – А.Гайфуллин и А.Поярков (двое других – Александр Уснич из Белоруссии и Живен Юн из Китая).

Нашу команду составляли одиннадцатиклассники Владимир Дремов (школа 24, Волгодонск), завоевавший на ММО свою третью золотую медаль, Юрий Лифшиц (ФМЛ 239, Санкт-Петербург) и Алексей Поярков (гимназия 2, Рыбинск), во второй раз ставшие золотыми медалистами, и дебютанты олимпиады Александр Гайфуллин (гимназия, Раменское) и Алексей Федотов (ФМЛ 239, Санкт-Петербург), а также девятиклассник Андрей Халявин (ФМЛ 35, Киров).

Традиционно на ММО школьникам в каждый из двух дней предлагается по 3 задачи, полное решение каждой оценивается в 7 баллов.

Наши школьники на олимпиаде показали следующие результаты:

	1	2	3	4	5	6	Σ	Медаль
А.Гайфуллин	7	7	7	7	7	7	42	золотая
А.Поярков	7	7	7	7	7	7	42	золотая
Ю.Лифшиц	7	7	7	4	7	6	38	золотая
В.Дремов	7	7	1	7	7	4	33	золотая
А.Федотов	7	7	1	6	7	5	33	золотая
А.Халявин	7	1	2	7	7	3	27	серебряная

В неофициальном командном зачете первая десятка практически не претерпела изменений по сравнению с прошлым годом (Венгрия сменила Румынию), а лучшие 20 команд завоевали все золотые медали олимпиады:

N	Команда	Σ	Золото	Серебро	Бронза	N	Команда	Σ	Золото	Серебро	Бронза
1	Китай	218	6	0	0	11	Израиль	139	2	1	3
2	Россия	215	5	1	0	12	Румыния	139	1	3	2
3	США	184	3	3	0	13	Украина	135	2	2	0
4	Ю.Корея	172	3	3	0	14	Индия	132	0	5	1
5	Вьетнам	169	3	2	1	15	Япония	125	1	2	3
6	Болгария	169	2	3	1	16	Австралия	122	1	3	1
7	Белоруссия	165	2	2	2	17	Канада	112	1	2	1
8	Тайвань	164	3	2	1	18	Турция	111	0	3	1
9	Венгрия	156	1	5	0	19	Словакия	111	0	2	3
10	Иран	155	2	3	1	20	Германия	108	1	1	2

А вот результаты команд бывших советских республик, не вошедших в первую двадцатку:

21	Армения	108	0	2	3	46	Латвия	60	0	0	3
24	Казахстан	91	0	1	4	58	Эстония	42	0	0	1
26	Молдова	84	0	2	3	62	Литва	34	0	0	1
36	Грузия	72	0	1	0	64	Азербайджан	32	0	0	0
38	Узбекистан	70	0	0	2	76	Киргизия	16	0	0	1

В заключение хотелось бы поздравить всех преподавателей, подготовивших членов команды и ее запасного участника Евгения Зинина (г.Краснодар), и поблагодарить за успешную работу тренеров сборной России: Сергея Львовича Берлова и Дмитрия Валерьевича Карпова (Санкт-Петербург), Алексея Яковлевича Белова, Бориса Николаевича Кукушкина и Григория Ривеновича Челнокова (Москва), Владимира Леонидовича Дольникова (Ярославль).

Особая благодарность – спонсору команды России на XL и XLI ММО фирме «Краниум» и лично Александру Анатольевичу Черепнину.

Задачи

1. Окружности Γ_1 и Γ_2 пересекаются в точках M и N. Прямая l – общая касательная к Γ_1 и Γ_2 такая, что M расположена к l ближе, чем N. Прямая l касается Γ_1 в точке A, а Γ_2 – в точке B. Прямая, проходящая через M параллельно l, пересекает вторично окружность Γ_1 в точке C, а окружность Γ_2 – в точке D. Прямые CA и DB пересекаются в точке E, прямые AN и CD – в точке P, прямые BN и CD – в точке Q.

Докажите, что $EP = EQ$.

(Россия)

2. Положительные числа a, b, c таковы, что $abc = 1$. Докажите, что

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\le 1.$$

(США)

3. Дано натуральное число $n \ge 2$. Сначала на горизонтальной прямой сидят n блох, не все в одной точке.

Для положительного действительного числа λ определим *прыжок* следующим образом:

выбираются две блохи, сидящие в произвольных точках A и B, причем A левее B, и блоха, сидящая в A, прыгает в точку C, расположенную на данной прямой справа от B, такую, что $BC/AB = \lambda$.

Определите все значения λ такие, что для любой точки M на этой прямой и для любого начального расположения n блох существует конечная последовательность прыжков, после которых все блохи окажутся справа от точки M.

(Белоруссия)

4. См. задачу М1761 «Задачника «Кванта».

5. См. задачу М1762 «Задачника «Кванта».

6. См. задачу М1763 «Задачника «Кванта».

Публикацию подготовили Н.Агаханов, Д.Терёшин

XXXI Международная физическая олимпиада

IPhO 2000

С 8 по 16 июля 2000 года в Великобритании прошла очередная международная физическая олимпиада. В ней приняли участие 289 школьников из 64 стран мира.

По результатам выступлений на двух Всероссийских физических олимпиадах и по итогам учебно-тренировочных и отборочных сборов в состав команды России вошли:

Ротаев Михаил – г.Новосибирск, школа-колледж 130,

Панов Евгений – г.Челябинск, ФМЛ 31,

Вахов Алексей – г.Пермь, ФМШ 146,

Вавилов Виталий – г.Набережные Челны, классический лицей 78,

Жук Сергей – г.Вологда, ВГЕМЛ.

Участникам олимпиады было предложено 3 теоретические и 2 экспериментальные задачи. Первая теоретическая задача состояла из пяти коротких отдельных заданий по разным разделам курса физики (механика, термодинамика, атомная физика, электростатика, электродинамика). Вторая задача представляла сложные исследования движения заряженной частицы в электрических и магнитных полях. Третья задача была посвящена определению условий, при которых могут быть обнаружены гравитационные волны (эта тема является одной из проблем современной физики). Первое эксперименталь-

Команда России на XXXI Международной физической олимпиаде *ное задание включало в себя спектрометрические измерения. Участникам олимпиады надо было продемонстрировать умения проводить фотометрические измерения, исследовать распределение энергии в спектре, нормировать свои результаты по кривым излучения абсолютно черного тела. Во втором экспериментальном задании требовалось исследовать трение скольжения при наличии тормозящей магнитной силы.*

Российские школьники в теоретическом туре олимпиады набрали 63% от максимально возможного числа баллов, а в экспериментальном – 78,5%. Эти результаты позволили сборной России занять второе место в неофициальном командном зачете, получив 173,2 балла из 250 возможных. В личном зачете результаты наших школьников таковы: А.Вахов – 40,1 б. (золотая медаль), Е.Панов – 38,1 б. (золотая медаль), М.Ротаев – 33,5 б. (серебряная медаль), В.Вавилов – 32,8 б. (серебряная медаль), С.Жук – 28,7 б. (бронзовая медаль). Отметим, что у Е.Панова это уже вторая золотая медаль (первая была завоевана на предыдущей международной олимпиаде).

Таким образом, все участники команды РФ получили медали. Таких команд оказалось всего 5 – Китай (5 золотых медалей!), Россия, Венгрия, Иран и США.

Ниже приводятся условия теоретических задач, предлагавшихся на XXXI Международной физической олимпиаде.

Теоретический тур

Задача 1

A. Прыгун привязан к концу длинного упругого жгута. Другой конец жгута прикреплен к высокому мосту. Прыгун делает шаг и падает с моста вниз к реке с нулевой начальной скоростью. Он не достигает воды. Масса прыгуна m. Длина нерастянутого жгута L. Жесткость жгута k. Ускорение свободного падения g.

Вы можете предположить, что

– прыгуна можно рассматривать как материальную точку массой m, привязанную к концу жгута;

– масса жгута пренебрежимо мала по сравнению с m;

– в течение всего времени полета можно пренебречь сопротивлением воздуха.

Получите следующие выражения:

a) расстояние y, которое прыгун пролетел к моменту первой полной остановки;

b) максимальную скорость прыгуна v_m, достигнутую в процессе падения;

c) время t полета прыгуна до первой полной остановки.

B. Тепловой двигатель работает, используя два одинаковых тела, имеющих первоначально различные температуры T_1 и T_2 ($T_1 > T_2$). Каждое тело имеет массу m и неизменную удельную теплоемкость c. Тела поддерживаются при постоянном давлении и не меняют своего фазового состояния.

a) Представьте подробный вывод выражения для конечной температуры T двух тел в предположении, что тепловой двигатель совершил максимальную теоретически возможную механическую работу.

b) Получите выражение для максимально возможной механической работы A_m.

c) Тепловая машина работает между двумя емкостями с водой объемом 2,50 м^3. Температура воды в первой емкости 350 К, а во второй 300 К. Вычислите по этим данным максимальную механическую работу.

C. Предполагается, что к моменту окончательного формирования Земли в ней присутствовали изотопы ^{238}U и ^{235}U, но не продукты их распада. Распад ^{238}U и ^{235}U используется для оценки возраста Земли τ.

a) Период полураспада изотопа ^{238}U составляет $4{,}5 \cdot 10^9$ лет. Периоды полураспада продуктов распада в получающейся радиоактивной цепочке намного меньше, и в первом приближении ими можно пренебречь. Цепочка распада заканчивается на стабильном изотопе свинца ^{206}Pb. Найдите число атомов ^{206}Pb, обозначаемое ^{206}n, которое получается в процессе радиоактивного распада за время t, как функцию числа ^{238}N атомов ^{238}U, сохранившихся к настоящему моменту, и периода полураспада ^{238}U. (Если вам удобно, используйте в качестве единицы времени 10^9 лет).

b) Аналогично, ^{235}U распадается с периодом полураспада $0{,}710 \cdot 10^9$ лет через цепочку короткоживущих продуктов, заканчивающуюся стабильным изотопом ^{207}Pb. Получите выражение для ^{207}n через ^{235}N и период полураспада ^{235}U.

c) Урановая руда, загрязненная рудой свинца, анализируется при помощи масс-спектрометра. Измерения относительных концентраций изотопов ^{204}Pb, ^{206}Pb и ^{207}Pb дают соотношения 1,00 : 29,6 : 22,6 соответственно. Изотоп ^{204}Pb используется для калибровки; он не является продуктом радиоактивного распада. Анализ чистой свинцовой руды дает соотношения 1,00 : 17,9 : 15,5. Зная, что отношение концентраций $^{238}N : {}^{235}N$ равно 137 : 1, получите выражение для возраста Земли τ.

d) Предполагая, что τ много больше периодов полураспада обоих изотопов урана, рассчитайте приближенное значение возраста Земли.

e) На самом деле это приближенное значение не является значительно большим по сравнению с наибольшим периодом полураспада, но оно может быть использовано для более точного расчета величины τ. Произведите такой расчет и оцените возраст Земли с точностью 2%.

D. Заряд Q равномерно распределен в вакууме по объему шара радиусом R.

a) Получите выражение для напряженности электрического поля на расстоянии R от центра шара для $r \le R$ и $r > R$.

b) Получите выражение для полной электрической энергии, связанной с этим распределением заряда.

E. Тонкое медное кольцо вращается относительно вертикальной оси, проходящей через его диаметр, в магнитном поле Земли. Величина индукции магнитного поля Земли в данной точке равна 44,5 мкТл. Вектор индукции направлен под углом 64° к горизонтали вниз. Определите, за какое время угловая скорость кольца уменьшится вдвое, если известно, что плотность меди равна $8{,}90 \cdot 10^3$ кг/м^3, а ее удельное сопротивление равно $1{,}70 \cdot 10^{-8}$ Ом · м. Это время много больше времени одного оборота. Трением в опорах и сопротивлением воздуха можно пренебречь. При решении данной задачи вы можете не учитывать явление самоиндукции, хотя на самом деле оно играет определенную роль.

Задача 2

a) Катодная лучевая трубка (КЛТ), состоящая из электронной пушки и экрана, помещена в однородное постоянное магнитное поле с магнитной индукцией, равной B и параллельной

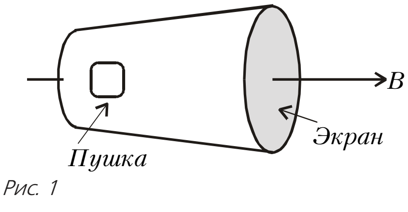

Рис. 1

оси пушки, как показано на рисунке 1. Электронный пучок излучается с катода электронной пушки вдоль ее оси, но имеет разброс направлений до 5° от оси. В общем случае на экране образуется размытое пятно, однако при определенных значениях магнитной индукции оно становится резко сфокусированным.

Рассмотрите движение электрона, который первоначально был излучен электронной пушкой под некоторым углом β к ее оси $(0 \le \beta \le 5^\circ)$, и, разложив это движение на компоненты, параллельные и перпендикулярные оси пушки, выведите выражение для отношения заряда электрона к его массе (e/m) через следующие величины: наименьшее значение магнитной индукции B_0, при котором получается сфокусированное пятно, ускоряющую разность потенциалов в электронной пушке U (примите во внимание, что $U < 2$ кВ) и расстояние между катодом и экраном D.

b) Рассмотрим другой метод определения отношения заряда электрона к его массе (установка показана на рисунке 2). В однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$ расположены две латунные круглые пластинки радиусом r, разделенные очень малым расстоянием t. Между пластинками существует разность потенциалов U. Пластинки параллельны друг другу и соосны, причем их общая ось перпендикулярна индукции магнитного поля. Фотопленка покрывает внутреннюю поверхность круглого цилиндра радиусом $r + s$, расположенного соосно пластинкам. Таким образом, расстояние между фотопленкой и краями пластинок равно s. Вся установка находится в вакууме. Отметим, что t намного меньше s и r.

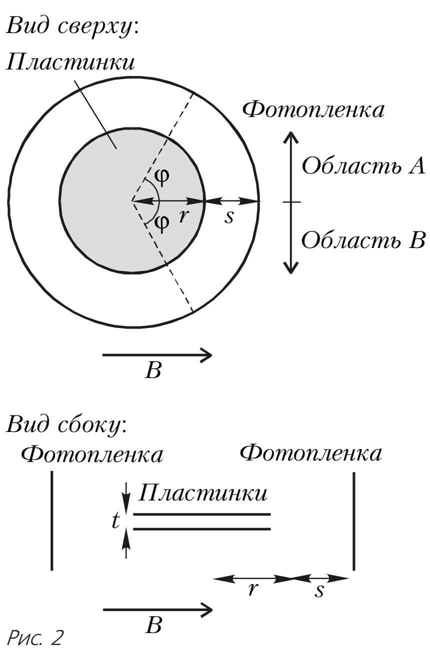

Рис. 2

Точечный источник β-частиц, испускающий β-частицы в интервале скоростей равномерно во всех направлениях, помещен посередине между центрами пластинок, и одна и та же пленка облучается при следующих трех различных условиях: $B = 0$ и $U = 0$, $B = B_0$ и $U = U_0$, $B = -B_0$ и $U = -U_0$, где U_0 и B_0 – положительные константы. Примите во внимание, что верхняя пластинка заряжена положительно при $U > 0$ и что индукция магнитного поля направлена, как показано на рисунке 2, при $B < 0$. В этой части задачи расстояние между пластинками можно считать пренебрежимо малым.

На рисунке 2 отмечены две области фотопленки: A и B. Одна из них после засветки пленки и проявления изображена на рисунке 3. Укажите, какая из областей (A или B) изображена на этом рисунке.

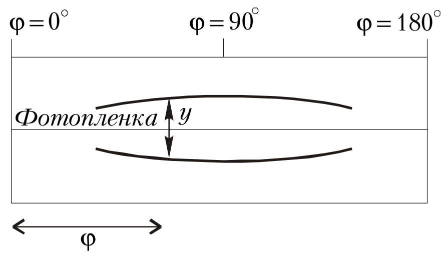

Рис. 3

c) Расстояние между двумя внешними следами на пленке измеряется с помощью микроскопа. На рисунке 3 показано это расстояние y для одного из значений угла φ. Результаты измерений приведены в следующей таблице (φ определен как угол между вектором магнитной индукции и линией, соединяющей центр пластинок и рассматриваемую точку на фотопленке):

Угол φ, градусы	90	60	50
Расстояние y, мм	17,4	12,7	9,7
Угол φ, градусы	40	30	23
Расстояние y, мм	6,4	3,3	конец следа

Численные значения параметров системы таковы: $B_0 = 6{,}91$ мТл, $U_0 = 580$ В, $t = 0{,}80$ мм, $s = 41{,}0$ мм. Кроме того, вы можете использовать значения скорости света в вакууме: $3{,}00 \cdot 10^8$ м/с и массы покоя электрона: $9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг.

Определите максимальную наблюдаемую кинетическую энергию β-частицы. Выразите численный ответ в электрон-вольтах (эВ).

d) Используя информацию, данную в пункте c), найдите значение отношения заряда электрона к его массе покоя. Учтите, что полученное вами значение может не согласоваться с известным из литературы значением из-за систематической погрешности при наблюдениях.

Задача 3

А. Эта часть задачи посвящена трудностям экспериментального обнаружения гравитационных волн, генерируемых при определенных астрономических явлениях. Заметим в этой связи, что взрыв удаленной сверхновой звезды может вызвать флуктуацию гравитационного поля на поверхности Земли порядка 10^{-19} Н/кг.

Модель детектора гравитационных волн (рис.4) состоит из двух металлических стержней длиной 1,0 м каждый, расположенных под прямым углом друг к другу. Один из торцов каждого стержня зеркально отполирован, а другой жестко закреплен. Положение одного из стержней выбрано так, чтобы сигнал, принимаемый фотоэлементом, был минимальным. Пьезоэлектрические устройства сообщают стержням резкие продольные импульсы, в результате чего свободные концы стержней колеблются с продольным смещением $\Delta x = ae^{-\mu t}\cos(\omega t + \alpha)$, где a, μ, ω и α – константы.

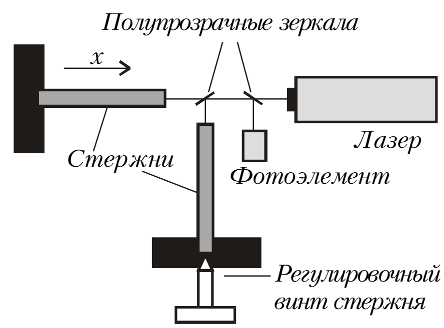

Рис. 4

a) Определите значение μ, если известно, что амплитуда колебаний уменьшается на 20% в течение 50 с.

b) Зная, что скорость продольных волн определяется по формуле $v = \sqrt{E/\rho}$, вычислите наименьшее значение частоты ω_0, если известно, что стержни сделаны из алюминия с плотностью $\rho = 2700$ кг/м^3 и модулем Юнга $E = 7{,}1 \cdot 10^{10}$ Па.

c) Невозможно изготовить стержни абсолютно одинаковой длины, а из-за разности длин стержней возникают биения сигнала фотоэлемента, частота которых составляет 0,005 Гц. Чему равна разность длин стержней δl?

d) Считая длину стержня равной l, получите алгебраическое выражение для изменения длины стержня Δl, появляющегося вследствие изменения ускорения свободного падения g на величину Δg. Изменение вектора $\Delta\vec{g}$ происходит в направлении только одного из стержней. Выразите ваш ответ через l и параметры материала стержня.

e) Лазер испускает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 656$ нм. Полагая, что минимальный сдвиг торца, который может быть зарегистрирован, равен длине волны излучения лазера, определите, какая минимальная длина стержня необходима, чтобы установка смогла зарегистрировать изменение гравитационного поля на величину порядка 10^{-19} Н/кг.

В. В этой части задачи изучаются эффекты влияния гравитационного поля на распространение света в пространстве.

a) Фотон, излучаемый с поверхности Солнца (масса Солнца M, радиус R), испытывает красное смещение. Поставив в соответствие энергии фотона эквивалентную массу покоя, воспользуйтесь теорией тяготения Ньютона и покажите, что наблюдаемая на бесконечности частота фотона уменьшается в $\left(1 - GM/(Rc)^2\right)$ раз (красное смещение).

b) Уменьшение частоты фотона эквивалентно увеличению его периода. Если использовать фотон в качестве эталонных часов, то уменьшение частоты эквивалентно замедлению времени. Далее можно показать, что замедление времени всегда сопровождается сокращением единицы длины во столько же раз. Рассмотрим влияние этого эффекта на распространение света вблизи Солнца. Вначале определим эффективный показатель преломления в точке, находящейся на расстоянии r от центра Солнца. Пусть $n_r = c/c'$, где c – скорость света, измеренная в системе координат, достаточно удаленной от гравитационного влияния Солнца ($g \to \infty$), c' – скорость света, измеренная в системе координат на расстоянии r от центра Солнца. Покажите, что для $GM/(Rc)^2 ? 1$ показатель преломления можно аппроксимировать выражением $n_r = 1 + \alpha GM/(rc)^2$, где α – коэффициент, который вы должны определить.

c) Используя выражение для n_r, вычислите в радианах угол отклонения луча света θ от прямолинейного пути при его прохождении вблизи края Солнца. Используйте следующие данные: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н·м²/кг², $M = 1{,}99 \cdot 10^{30}$ кг, $R = 6{,}95 \cdot 10^8$ м, $c = 3{,}00 \cdot 10^8$ м/с. Вам также может пригодиться такой интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\left(x^2 + a^2\right)^{3/2}} = \frac{2}{a^2}.$$

Публикацию подготовили
С.Козел, В.Коровин, В.Орлов

Избранные задачи Санкт-Петербургской математической олимпиады

Первый (районный) тур

1. Серединный перпендикуляр к стороне BC треугольника ABC пересекает сторону AB в точке D, а луч CA – в точке E. Докажите, что $AD < EA$. (8–9)[1]

С.Берлов

2. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC угол A – прямой, E – точка пересечения диагоналей, F – проекция E на сторону AB (рис.1). Докажите, что углы DFE и CFE равны. (9)

С.Берлов

3. Последовательность вещественных чисел $x_1, x_2, x_3, \ldots$ удовлетворяет равенству

$$x_{n+2} = \frac{x_n x_{n+1} + 5x_n^4}{x_n - x_{n+1}}$$

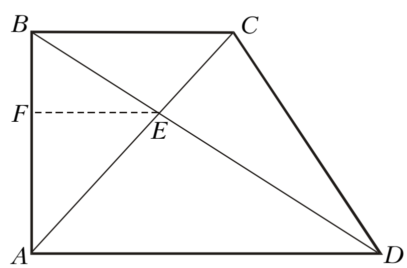

Рис. 1

при всех натуральных n. При этом $x_{2000} = x_1$. Докажите, что $x_{1999} \neq x_2$. (10)

С.Иванов

4. Функция f задана при всех вещественных x и удовлетворяет неравенствам

$$f(x+1) \le f(2x+1)$$

и

$$f(3x+1) \ge f(6x+1).$$

Известно, что $f(3) = 2$. Докажите, что уравнение $f(x) = 2$ имеет по крайней мере 2000 решений. (11)

А.Храбров

Второй (городской) тур

5. Десятичная запись числа $5 \cdot a$ состоит из 1000 пятерок и 1000 шестерок. Найдите сумму цифр числа a. (6)

Р.Семизаров

6. а) Во дворе стоят 36 столбов, причем первоначально любые два столба были соединены проводом. Каждое утро хулиган Вася по дороге в школу срывает не более 35 проводов, а электрик Петров каждый вечер восстанавливает все провода, связывавшие один из столбов с остальными. Докажите, что Вася может действовать так, что однажды после его хулиганства останется не более 17 целых проводов. (6)

б) В стране 2000 городов. Любые два города соединены двусторонней бес-

[1] *В скобках после условия задачи указан класс, в котором она предлагалась.*

посадочной авиалинией. Когда-то все авиалинии были государственными. 1 января каждого года правительство выбирает не более 1999 государственных авиалиний и продает их частным авиакомпаниям. После этого 1 мая парламент выбирает один из городов и возвращает государству все частные авиалинии, выходящие из этого города. Докажите, что правительство может действовать так, чтобы к некоторому моменту не менее 99% авиалиний оказались частными. (7)

А.Пастор

7. В клетках таблицы 100×100 расставлены числа так, что в любом квадрате размером 2×2 суммы чисел, стоящих в противоположных углах квадрата, равны. Докажите, что и в любом прямоугольнике суммы чисел, стоящих в противоположных углах, равны. (7)

С.Берлов

8. В Однобоком графстве между некоторыми (но не всеми) усадьбами проложены дороги с односторонним движением. Известно, что если построить любую новую дорогу (также с односторонним движением) между усадьбами, не соединенными (ни в одном направлении) дорогой до этого, то можно будет добраться от любой усадьбы до любой другой, не нарушая правил. Докажите, что это возможно уже сейчас. (7)

Д.Ростовский

9. Написанное на доске число n можно заменить на одно из чисел $2n - 4$, $3n - 8$ или $8 - n$. Можно ли за несколько таких операций из числа 41 получить число, большее 10000000, но меньшее 10000020? (7–8)

Ф.Петров

10. Каждый день в группе из нечетного числа людей трое выходят на дежурство. Докажите, что можно составить такой график, что через некоторое время любые два человека трижды подежурят вместе. (7–8)

А.Косовская

11. а) Вдоль дороги с каждой стороны посадили по 1000 деревьев. На каждое дерево повесили табличку, в которой указано, сколько дубов в множестве деревьев, состоящем из этого дерева и его соседей слева и справа (у крайних деревьев – из самого дерева и его единственного соседа). Оказалось, что две последовательности чисел на табличках совпадают. Докажите, что в обоих рядах дубы растут на одних и тех же местах. (9)

б) Каждый месяц лесник Ермолай сажал вдоль забора ряд из 2000 деревьев и на каждое дерево вешал табличку с указанием, сколько дубов в множестве деревьев, состоящем из самого дерева, его левого и правого соседей. Таким образом получалась последовательность из 2000 чисел. Сколько различных последовательностей мог получить лесник Ермолай? (9)

А.Храбров, Д.Ростовский

12. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1.

а) На высоте AA_1 выбрана такая точка D, что $A_1D = B_1D$. Точка E – середина стороны AB. Докажите, что точки A, B_1, D и E лежат на одной окружности. (9)

б) Пусть точки K и M – середины отрезков AB и A_1B_1 соответственно, а отрезки AA_1 и KM пересекаются в точке L. Докажите, что точки A, B_1, K и L лежат на одной окружности. (10)

С.Берлов

13. Пусть $f(x) = x^{2000} - x^{1000} + 1$. Существуют ли такие различные натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_{2001}$, что $f(a_i)f(a_j)$ делится на a_ia_j при всех $i \neq j$? (9)

А.Баранов

14. На координатной плоскости проведена 101 прямая и отмечены все точки их пересечений. Может ли быть так, что на каждой из проведенных прямых лежат 50 отмеченных точек с положительными абсциссами и 50 – с отрицательными? (9–10)

С.Иванов

15. На доске написаны натуральные числа 1, 2, …, 2000. Два игрока поочередно делают ходы по следующим правилам. Разрешается стереть любые два числа a и b и написать вместо них a^b. Через некоторое время на доске останется одно число. Первый игрок выигрывает, если оно оканчивается на 2, 3, 7 или 8, а второй – в противном случае. Кто выиграет при правильной игре? (9)

В.Франк

16. Вневписанная окружность треугольника ABC касается его стороны BC в точке K, а продолжения стороны AB – в точке L (рис.2). Другая вневписанная окружность касается продолжений сторон BA и BC в точках M и N соответственно. Прямые KL и MN пересекаются в точке X. Докажите, что CX – биссектриса угла ACN. (9)

б) Одна из вневписанных окружностей треугольника ABC касается стороны AB и продолжений сторон CA и CB в точках C_1, B_1 и A_1 соответственно. Другая вневписанная окружность касается стороны AC и продолжений

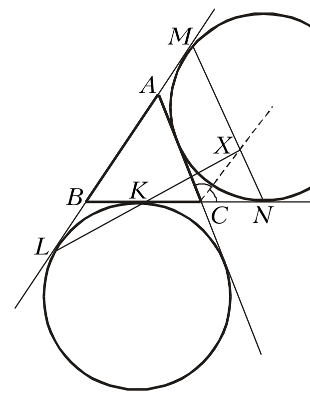

Рис. 2

сторон BA и BC в точках B_2, C_2 и A_2 соответственно. Прямые A_1B_1 и A_2B_2 пересекаются в точке P, прямые A_1C_1 и A_2C_2 – в точке Q. Докажите, что точки A, P и Q лежат на одной прямой. (10)

С.Берлов

17. Число N равно произведению 200 различных натуральных чисел. Докажите, что N имеет не меньше 19901 различных натуральных делителей (включая единицу и само число). (10)

А.Голованов

Отборочный тур на Всероссийскую олимпиаду

18. На координатной плоскости расположены 100 точек. Докажите, что существует не более $2025 = 45^2$ прямоугольников с вершинами в этих точках и со сторонами, параллельными осям. (9)

С.Иванов

19. Сеть авиалиний считается надежной, если после закрытия любого аэропорта из любого открытого аэропорта можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками). В стране 2000 аэропортов и изначально нет авиалиний. Две авиакомпании по очереди вводят новые беспосадочные авиалинии. Авиакомпания, после хода которой получается надежная сеть авиалиний, проигрывает. Какая из авиакомпаний выиграет при правильной игре? (9)

Д.Карпов

20. На клетчатой плоскости лежит 111 не перекрывающихся друг с другом трехклеточных уголков. При этом выполняется такое свойство: для любого из уголков содержащий его квадрат 2×2 целиком покрыт уголками. Докажите, что можно убрать один или несколько уголков (но не все) так, чтобы это свойство сохранилось. (10)

А.Железняк, Ю.Белов

21. В каждой клетке шахматной доски написано положительное число так, что в каждой горизонтали сумма чисел равна 1. Известно, что при любой расстановке восьми не бьющих друг друга ладей на доске произведение чисел под ними не больше произведения чисел на главной диагонали. Докажите, что сумма чисел на главной диагонали не меньше 1. (10)

Ф.Бахарев

22. Прямая l – касательная к окружности, описанной вокруг остроугольного треугольника ABC, проведенная в точке B. Точка K – проекция ортоцентра треугольника на прямую l, а точка L – середина стороны AC. Докажите, что треугольник BKL – равнобедренный. (11)

Ф.Бахарев

23. Внутри единичного квадрата с единичными скоростями летают два шарика. Между собой они не взаимодействуют, а от стенок отскакивают по закону «угол падения равен углу отражения». Докажите, что с верхней стороны на нижнюю может с единичной скоростью спуститься паучок на паутинке так, что при спуске ни его, ни паутинку шарики не заденут. (11)

К.Пименов

Публикацию подготовил А.Спивак

Московская студенческая олимпиада по физике

21 мая 2000 года в Московском государственном техническом университете (МГТУ) им. Н.Э.Баумана прошел московский региональный тур Всероссийской олимпиады по физике среди студентов технических вузов. К участию в олимпиаде были приглашены все ведущие технические вузы Москвы. Каждая команда состояла из 5 студентов (до 3 курса включительно). Участникам олимпиады были предложены 10 задач (в зависимости от сложности задачи оценивались от 6 до 10 баллов) и разрешалось пользоваться любой литературой.

По результатам олимпиады в командном зачете первое место заняла команда МГТУ (80 баллов), второе место – команда Московского института электронной техники (56 баллов), третье – команда Московского института стали и сплавов (54 балла).

В личном зачете первое место завоевал П.Чирков (МГТУ, 28 баллов), второе место – Д.Делия (МГТУ, 25 баллов), третье место – А.Мармулёв (МИСиС, 19 баллов).

Ниже приводятся условия олимпиадных задач.

1. Карандаш длиной L удерживается вертикально, касаясь нижней точкой гладкой поверхности, наклоненной под углом α к горизонту. Предоставленный самому себе карандаш падает на поверхность за время τ. Определите скорость центра масс карандаша в момент соприкосновения с поверхностью. (5 б.)

2. Цилиндрическое тело радиусом R лежит у гладкой стенки, касаясь ее, на гладкой поверхности. Центр тяжести тела смещен от оси на расстояние $R/2$. В начальный момент времени тело лежит таким образом, что вектор, проведенный от оси цилиндра к центру тяжести, направлен вертикально вверх. На какой угол повернется этот вектор, прежде чем тело оторвется от стенки? (6 б.)

3. Космический зонд, движущийся вокруг Солнца по орбите Земли, т.е. по окружности радиусом R_0, должен приблизиться к Солнцу на расстояние $R_0/10$ для проведения астрономических измерений. Какую минимальную характеристическую скорость должен иметь зонд для данного маневра? Характеристической называется максимальная скорость, которую способен достичь космический корабль при движении в свободном пространстве. Скорость движения зонда по орбите Земли равна v_0. (8 б.)

4. Два одинаковых сплошных цилиндра массой M катятся по горизонтальной поверхности таким образом, что один цилиндр толкает перед собой другой. К оси толкающего цилиндра приложена горизонтальная сила F. Коэффициент трения между поверхностью и цилиндрами и между цилиндрами одинаков и равен μ. Определите силу F, при которой начнется проскальзывание между поверхностью и хотя бы одним из цилиндров. (8 б.)

5. Тяжелый поршень площадью S, опускаясь, вытесняет воздух из цилиндрического сосуда объемом V через маленькое отверстие в дне в сосуд такого же объема. Начальные параметры воздуха в обоих сосудах одинаковы и равны их нормальным значениям. При какой минимальной массе поршня произойдет полное вытеснение воздуха из первого сосуда? (7 б.)

6. Определите напряженность электрического поля в центре маленького отверстия, сделанного в поверхности сферы, равномерно заряженной с поверхностной плотностью заряда σ. (5 б.)

7. Заряженная частица с зарядом Q и массой m движется по прямой, проходящей через центр заземленной металлической сферы радиусом R. Определите скорость частицы на расстоянии $2R$ от центра сферы, если на бесконечности эта скорость была v_0. (8 б.)

8. Две одинаковые катушки с индуктивностью L расположены близко друг от друга. Если выводы второй катушки замкнуть накоротко, то измеренная индуктивность первой уменьшится вдвое. Определите коэффициент взаимоиндукции L_{12} между катушками. (8 б.)

9. Некий циклический процесс, проводимый с одноатомным газом, в координатах $T-S$ состоит из трех участков: T = const, S = const, $T = T_0 \exp\left(\left(S-S_0\right)/C_V\right)$. Минимальные значения энтропии S_0 и температуры и T_0 заданы. Точка S_0, T_0 соответствует пересечению графика экспоненциального процесса с изотермой. Определите КПД процесса, если известно, что объем за цикл изменяется в 5 раз. (7 б.)

10. Плоская световая волна с длиной волны λ падает на линзу с диаметром D и фокусным расстоянием F. Сколько дифракционных максимумов находится на оси системы в интервале от $x = F/2$ до $x = 2F$, где x – расстояние от линзы? (5 б.)

Публикацию подготовили
М.Яковлев, В.Голубев