Есть такая функция!

Профессор логики упомянул во время лекции, что, насколько ему известно, ни в одном естественном языке два утверждения никогда не означают отрицания. Из задних рядов раздалось саркастическое: "Ну да, конечно!".

Существует ли многочлен, все значения которого – положительные числа, причем среди этих значений есть сколь угодно малые числа? Да, существует! Правда, это многочлен не от одной, а от нескольких переменных:

$$f(x, y) = x^2 + (xy - 1)^2.$$

Почему? Во-первых, сумма квадратов всегда неотрицательна. Во-вторых, эта сумма не может равняться нулю, поскольку равенства $x = 0$ и $xy = 1$ несовместны. В-третьих, рассмотрев $x = 1/n$ и $y = n$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$, убеждаемся, что величина $x^2 + (xy-1)^2 = 1/n^2$ может быть сколь угодно малой.

В 1890 году Джузеппе Пеано (1858–1932) поразил мир кривой, которая целиком покрывает некоторый квадрат (т.е. проходит через все точки этого квадрата, причем через некоторые – по нескольку раз). Простой пример кривой Пеано построил в 1891 году Давид Гильберт (1862–1943). Первые пять шагов этой красивой конструкции показаны на рисунках. Как видите, на n-м шаге Гильберт разбивает отрезок $[0; 1]$ на 4^n равных отрезочков, которые извилисто размещаются по одному в каждом из 4^n равных квадратиков. Чтобы определить образ любой данной точки t отрезка $[0; 1]$, нужно для каждого натурального числа n разбить отрезок $[0; 1]$ на отрезочки длиной $1/4^n$, отметить, какому из них принадлежит точка t (или каким двум – если точка t попала в точности на границу), и построить соответствующий квадрат Δ_n со стороной $1/2^n$. Образуется последовательность квадратов $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \Delta_3 \supset \ldots$

$\ldots \supset \Delta_n \supset \ldots$, общая точка которых – образ точки t.

Существует ли:

а) разрывная во всех точках функция, модуль которой – непрерывная функция;

б) функция, непрерывная лишь в точке $x = 0$ и разрывная во всех других точках;

в) функция, среди значений которой на любом (сколь угодно малом) интервале есть сколь угодно большие значения;

г) непостоянная периодическая функция, среди положительных периодов которой нет наименьшего;

д) функция, непрерывная в иррациональных и разрывная в рациональных точках;

е) не монотонное ни на каком интервале взаимно однозначное соответствие между двумя отрезками;

ж) определенная на $[0; 1]$ функция $g(x)$, множеством значений которой является отрезок $[0; 1]$ и множество значений которой не меняется при ограничении на любой интервал? (Поскольку последнее условие довольно трудно для восприятия, поясню: для любого числа $0 \le y \le 1$ множество решений уравнения $g(x) = y$ должно быть всюду плотно на отрезке $[0; 1]$.)

Наверное, сейчас читателю стоит остановиться и самому придумать соответствующие примеры: ответ на все эти вопросы утвердительный. А если все примеры придуманы или прошло уже слишком много времени – читайте дальше.

Вот ответы на поставленные вопросы.

а) Годится функция

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ - рациональное,} \\ -1, & \text{если } x \text{ - иррациональное.} \end{cases}$$

б) Такова функция $xf(x)$, где $f(x)$ – функция из п.а).

в) Например, функция, которая равна 0 для любого иррационального x и равна n для любого рационального числа $x = m/n$, где m – целое, n – натуральное, НОД$(m, n) = 1$.

г) Годится функция $f(x)$ из п. а). Впрочем, в большинстве учебников математического анализа рассматривают не ее, а функцию Дирихле (1805–1859)

$$D(x) = \frac{1 + f(x)}{2} =$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ - рациональное,} \\ 0, & \text{если } x \text{ - иррациональное.} \end{cases}$$

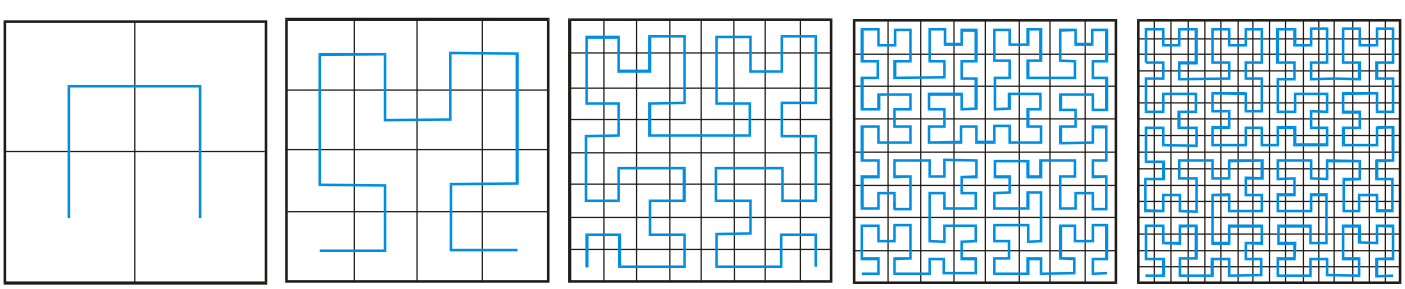
д) Например, функция Римана (1826–1866), которая равна 0 для любого иррационального x и равна $1/n$ для любого рационального числа $x = m/n$, где m – целое, n – натуральное, НОД$(m, n) = 1$. Можно доказать (хотя для школьника это доказательство довольно сложно и лучше его оставить до студенческих времен), что не существует функции, непрерывной во всех рациональных и разрывной во всех иррациональных точках.

е) Рассмотрите функцию из п. б) на отрезке $[-1; 1]$.

ж) Такую функцию впервые построил Анри Леон Лебег (1875–1941). Пусть $0 \le x \le 1$ и

$$x = 0,a_1a_2a_3\ldots$$

– десятичное представление числа x.



Если x может быть представлено конечной десятичной дробью, $g(x) = 0$. Для остальных чисел значение $g(x)$ будет зависеть от того, является ли последовательность $a_1, a_3, a_5, \ldots$ периодической. А именно, $g(x) = 0$, если число $0, a_1 a_3 a_5 \ldots$ иррационально, и $g(x) = 0, a_{2n} a_{2n+2} a_{2n+4} \ldots$, если последовательность $a_1, a_3, a_5, \ldots$ периодическая, причем периодическое повторение начинается с цифры a_{2n-1}.

Построенная функция действительно принимает на каждом интервале $I \subset [0; 1]$ любое значение $y = 0, b_1 b_2 b_3 \ldots$ Чтобы доказать это, выберем цифры $a_1, a_2, \ldots, a_{2n-2}$ так, чтобы числа $0, a_1 a_2 \ldots a_{2n-2} 0$ и $0, a_1 a_2 \ldots a_{2n-2} 1$ принадлежали интервалу I, причем цифра a_{2n-3} была отлична от 0 и 1. Далее, пусть $a_{2n-1} = a_{2n+1} = \ldots = a_{4n-5} = 0$ и $a_{4n-3} = 1$. Будем периодически повторять эти n цифр, располагая их на местах с нечетными номерами.

Итак, мы определили последовательность $a_1, a_3, a_5, \ldots$, период которой начинается именно с a_{2n-1}. Осталось заметить, что по определению

$$g(0, a_1 a_2 a_3 \ldots a_{2n-1} b_2 a_{2n+3} b_3 a_{2n+5} \ldots) = 0, b_1 b_2 b_3 \ldots = y.$$

Рассмотрим функцию

$$h(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Ее производная, равная

$$\begin{cases} 2x \sin(1/x) - \cos(1/x), & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

разрывна в точке $x = 0$.

Функция

$$k(x) = \begin{cases} x^4 \left(2 + \sin \dfrac{1}{x}\right), & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

имеет абсолютный минимум в точке $x = 0$. А ее производная в любой окрестности нуля принимает как положительные, так и отрицательные значения. (Заметьте: функция k не монотонна ни в какой окрестности нуля!)

Функция, заданная формулой $x + 2x^2 \sin(1/x)$ при $x \neq 0$ и равная 0 при $x = 0$, имеет в точке $x = 0$ производную 1, а при $x \neq 0$ производная равна $1 + 4x \sin \dfrac{1}{x} - 2 \cos \dfrac{1}{x}$. Ничего особенного? Да нет же, это интересный пример: производная в точке 0 положительна, а функция не монотонна ни в какой окрестности нуля, поскольку производная в любой окрестности нуля принимает как положительные, так и отрицательные значения!

Функция, заданная формулой $x^2 \sin(1/x^2)$ при $x \neq 0$ и равная 0 при $x = 0$, обладает тем интересным свойством, что ее производная, равная 0 при $x = 0$ и равная $2x \sin \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x} \cos \dfrac{1}{x^2}$ при $x \neq 0$, неограничена ни на какой окрестности нуля.

Последний и самый интересный пример – всюду непрерывная, но нигде не дифференцируемая функция. Такую функцию построил Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс (1815–1897):

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b^n \cos(a^n \pi x),$$

где a – целое нечетное число, а число b таково, что $0 < b < 1$ и $ab > 1 + \dfrac{3}{2}\pi$. (В 1916 году Годфри Харолд Харди (1877–1947) доказал, что достаточно потребовать $0 < b < 1$ и $ab > 1$.)

В 1930 году Бартел Лендерт Ван-дер-Варден придумал более простой пример такой функции. Обозначим через $\langle x \rangle$ расстояние от числа x до ближайшего целого числа. Другими словами, при $-\dfrac{1}{2} \leq x \leq \dfrac{1}{2}$ пусть $\langle x \rangle = |x|$, а дальше продолжим эту функцию периодически (с периодом 1).

Для любого целого неотрицательного числа n обозначим $f_n(x) = \langle 4^n x \rangle / 4^n$ и рассмотрим сумму

$$w(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$

Функция $w(x)$ непрерывна как сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций.

Пусть a – произвольное вещественное число. Для любого натурального числа n выберем $h_n = 1/4^{n+1}$ или $h_n = -1/4^{n+1}$ так, что $|f_n(a + h_n) - f_n(a)| = |h_n|$. Тогда разность $f_m(a + h_n) - f_m(a)$ равна 0 при $m > n$ и равна $\pm h_n$ при $m \leq n$. Следовательно, отношение

$$\frac{w(a + h_n) - w(a)}{h_n}$$

является целым числом, которое четно при нечетном n и нечетно при четном n. Значит, предел

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{w(a + h_n) - w(a)}{h_n}$$

не существует, т.е. функция w не дифференцируема.

Функция Ван-дер-Вардена обладает еще одним интересным свойством. Пусть $x = k/4^n$, где k – целое число. Обозначим $h = 1/4^{2n+1}$. Тогда

$$w(x) = f_0(x) + f_1(x) + \ldots + f_{n-1}(x)$$

и

$$w(x+h) - w(x) = \left(f_0(x+h) - f_0(x)\right) + \left(f_1(x+h) - f_1(x)\right) + \ldots + \left(f_{n-1}(x+h) - f(x)\right) + f_n(x+h) + f_{n+1}(x+h) + f_{n+2}(x+h) + \ldots + f_{2n}(x+h) \geq -nh + (n+1)h > 0.$$

Аналогично,

$$w(x-h) - w(x) \geq -hn + (n+1)h > 0.$$

Итак, $w(x-h) > w(x) < w(x+h)$. Поскольку точки вида $x = k/4^n$ всюду плотны, то не существует интервала, на котором функция w монотонна.

Ф.Спиров