

# О пользе вневыписанных окружностей

Ю.БИЛЕЦКИЙ, Г.ФИЛИППОВСКИЙ

**В**НЕВЫПИСАННАЯ ОКРУЖНОСТЬ представляется в некотором смысле изысканным элементом геометрии треугольника. Знакомство с ней зачастую ограничивается определением, нахождением ее центра и решением нескольких популярных задач, встречающихся на конкурсных экзаменах. Однако, как нам кажется, «взяв правильный угол сердца» (В.Хлебников) к вневыписанной окружности, мы увидим в ней скрытую красоту и силу, станем рассматривать ее как подспорье в решении геометрических задач.

## Вневыписанная окружность

**Теорема 1.** Биссектриса внутреннего угла  $BAC$  треугольника  $ABC$  и биссектрисы двух внешних углов при вершинах  $B$  и  $C$  пересекаются в одной точке.

**Доказательство.** Проведем внешние биссектрисы из вершин  $B$  и  $C$ . Пусть они пересекаются в точке  $J_a$  (рис.1). Докажем, что биссектриса угла  $BAC$  проходит через точку  $J_a$ . Все точки биссектрисы равноудалены от сторон угла, значит, расстояния от точки  $J_a$  до прямых  $BC$  и  $AC$  равны, так как  $J_a$  лежит на биссектрисе угла  $BCT_1$ . Аналогично, равны расстояния от точки  $J_a$  до прямых  $BC$  и  $AB$ . Тогда очевидно, что точка  $J_a$  равноудалена от прямых  $AC$  и  $AB$ , т. е. лежит на биссектрисе угла  $BAC$ .

Из теоремы 1 следует, что существует окружность с центром в точке  $J_a$ , касающаяся прямых  $AC$ ,  $AB$  и  $BC$ .

**Определение.** Вневыписанной окружностью называется окружность, касающаяся стороны треугольника и продолжений двух других сторон.

Отметим, что для каждого треугольника существуют три вневыписанные окружности, их радиусы будем обозначать  $r_a$ ,  $r_b$  и  $r_c$  в зависимости от

того, какой стороны треугольника они касаются.

**Теорема 2.** Пусть  $T_1$  – точка касания вневыписанной окружности с продолжением стороны  $AC$  треугольника  $ABC$ . Тогда длина отрезка  $AT_1$  равна полупериметру треугольника  $ABC$  (см. рис.1).

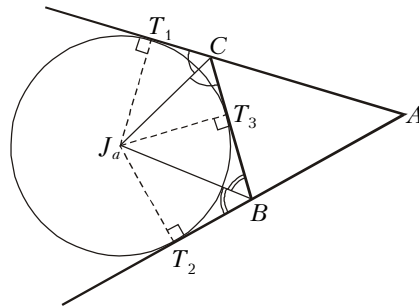


Рис. 1

**Доказательство.** Пусть  $T_2$  и  $T_3$  – точки касания вневыписанной окружности с прямыми  $AB$  и  $BC$  соответственно. Тогда  $CT_1 = CT_3$ ,  $BT_2 = BT_3$  и периметр треугольника  $ABC$  равен  $2p = AC + CT_3 + BT_3 + AB = AC + CT_1 + AB + BT_2 = AT_1 + AT_2$ . А так как  $AT_1 = AT_2$ , то  $p = AT_1$ , что и требовалось доказать.

**Теорема 3.** Площадь  $S$  треугольника  $ABC$  равна  $S = r_a(p - a)$ .

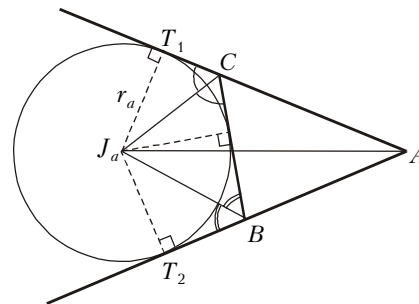


Рис. 2

**Доказательство.** Легко видеть (рис.2), что

$$\begin{aligned} S &= S_{ABC} = S_{J_aCA} + S_{J_aBA} - S_{J_aCB} = \\ &= \frac{1}{2}r_a b + \frac{1}{2}r_a c - \frac{1}{2}r_a a = r_a(p - a). \end{aligned}$$

**Теорема 4.** Пусть  $K$  – точка касания вписанной окружности со стороной  $BC$ ,  $KR$  – диаметр вписанной окружности. Тогда точки  $A$ ,  $R$  и  $T_3$  лежат на одной прямой (рис.3).

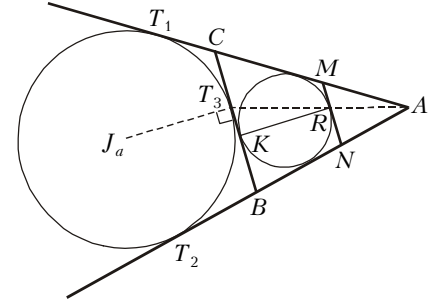


Рис. 3

**Доказательство.** Пусть прямая  $AR$  пересекает  $BC$  в некоторой точке  $X$ . Докажем, что  $X$  совпадает с  $T_3$ . Проведем через  $R$  прямую, параллельную  $BC$ . Обозначим ее точки пересечения с  $AC$  и  $AB$  через  $M$  и  $N$  соответственно. Окружность, вписанная в  $\triangle ABC$ , является вневыписанной для  $\triangle AMN$ . Следовательно, окружность, вневыписанная в  $\triangle ABC$ , будет касаться  $BC$  в точке  $X$ . Таким образом,  $X$  совпадает с  $T_3$ .

## Решение задач

Отметим, что условия следующих задач не содержат термина «вневыписанная окружность». Она появляется в решении как вспомогательная фигура.

**Задача 1.** На стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  найдите точку, которая делит периметр треугольника  $ABC$  пополам.

**Ответ:** это точка касания вневыписанной окружности со стороной  $BC$  (см. доказательство теоремы 2).

**Задача 2.** Из точки  $A$  к данной окружности проведены касательные  $AT_1$  и  $AT_2$ . К окружности проведена касательная, пересекающая отрезки  $AT_1$  и  $AT_2$  в точках  $B$  и  $C$ . Докажите, что периметр треугольника  $ABC$  не зависит от положения касательной.

**Решение.** По теореме 2, независимо от положения касательной, периметр треугольника  $ABC$  равен удвоенной длине отрезка  $AT_1$ .