4. $f_2 = f_1 p_1 T_2 / (p_2 T_1) \approx 29\%$. **5.** $\mathcal{E} = 3\Delta Q/C$.

6. $Q = a^2 B(4-\pi)/(\pi R)$. **7.** $v = 2{,}4\cdot 10^5$ м/с.

8. На расстоянии 6 см от одного из источников.

XLI Международная математическая олимпиада

1. Пусть $K = MN \cap AB$. По теореме о касательной и секущей $AK^2 = KN\cdot KM = BK^2$, следовательно, K – середина AB. Так как $PQ \| AB$, то M – середина PQ. Поэтому достаточно доказать, что $EM \perp PQ$.

Из параллельности CD и AB вытекает, что A и B – середины дуг CM и DM, т.е. ΔACM и ΔBDM – равнобедренные. Из сказанного следует, что $\angle BAM = \angle AMC = \angle ACM = \angle EAB$ и $\angle ABM = \angle BMD = \angle BDM = \angle EBA$, т.е. точки E и M симметричны относительно прямой AB. Значит, прямая EM перпендикулярна AB, а следовательно, и PQ.

2. Положим $a = \dfrac{x}{y}$, $b = \dfrac{y}{z}$, $c = \dfrac{z}{x}$. Тогда исходное неравенство перепишется в виде

$$(x-y+z)(y-z+x)(z-x+y) \le xyz. \qquad (\&)$$

Мы пришли к хорошо известному неравенству (оно использовалось, например, при решении задачи М1333). Одно из возможных доказательств этого неравенства таково. Заметим, что среди чисел $u = x - y + z$, $v = y - z + x$, $w = z - x + y$ не более одного отрицательного, так как сумма любых двух из них положительна. Если такое число одно, то $uvw \le 0 < xyz$. Если же $u, v, w \ge 0$, то достаточно перемножить три очевидных неравенства:

$$x^2 \ge x^2 - (y-z)^2,$$
$$y^2 \ge y^2 - (z-x)^2,$$
$$z^2 \ge z^2 - (x-y)^2.$$

Замечание 1. Из решения видно, что равенство достигается тогда и только тогда, когда $a = b = c = 1$.

Замечание 2. При $u, v, w > 0$ неравенство $(\&)$ можно, очевидно, сформулировать так: радиус вписанного круга произвольного треугольника не превосходит половины радиуса описанного круга.

3. *Ответ:* $\lambda \ge \dfrac{1}{n-1}$.

Покажем сначала, что при указанных значениях λ мы можем увести всех блох так далеко вправо, как мы того пожелаем. Будем использовать следующую стратегию: на каждом прыжке выберем самую левую блоху и заставим ее прыгнуть через самую правую блоху. После k таких прыжков мы получим конфигурацию блох, для которой и обозначим через d_k максимальное, а через δ_k – минимальное расстояние между блохами. Очевидно, что $d_k \ge (n-1)\delta_k$. После $(k+1)$-го прыжка среди расстояний между соседними блохами появляется новое: λd_k. Может оказаться, что $\delta_{k+1} = \lambda d_k$. Если это не так, то $\delta_{k+1} \ge \delta_k$. В любом из этих случаев

$$\frac{\delta_{k+1}}{\delta_k} \ge \min\left\{1, \frac{\lambda d_k}{\delta_k}\right\} \ge \min\{1, (n-1)\lambda\}.$$

Следовательно, если $\lambda \ge \dfrac{1}{n-1}$, то $\delta_{k+1} \ge \delta_k$ для всех k, т.е. наименьшее расстояние между блохами не убывает, откуда и вытекает доказываемое утверждение.

Докажем теперь, что при $\lambda < \dfrac{1}{n-1}$ из любой начальной конфигурации мы не сможем увести всех блох далеко вправо никакой последовательностью прыжков. Введем на данной прямой систему координат. Пусть s_k – сумма координат всех блох после k-го прыжка в произвольной последовательности прыжков, а w_k – наибольшая из этих координат (т.е. координата самой правой блохи). Заметим, что $s_k \le nw_k$. После $(k+1)$-го прыжка блоха из точки A перепрыгнула через B и оказалась в C. Пусть координаты этих точек a, b, c соответственно. Тогда $s_{k+1} = s_k + c - a$. По условию $c - b = \lambda(b-a)$, т.е. $\lambda(c-a) = (1+\lambda)(c-b)$. Значит, $s_{k+1} - s_k = c - a = \dfrac{1+\lambda}{\lambda}(c-b)$. Предположим, что $c > w_k$. Блоха, которая только что прыгнула, заняла новую крайнюю правую позицию $w_{k+1} = c$. Так как b – положение какой-то блохи после k-го прыжка, то $b \le w_k$. Следовательно,

$$s_{k+1} - s_k = \frac{1+\lambda}{\lambda}(c-b) \ge \frac{1+\lambda}{\lambda}(w_{k+1} - w_k).$$

Эта оценка справедлива и в случае $c \le w_k$: $w_{k+1} - w_k = 0$, $s_{k+1} - s_k = c - a > 0$.

Пусть $z_k = \dfrac{1+\lambda}{\lambda}w_k - s_k$ для $k = 0, 1, 2, \ldots$ Применяя сделанную выше оценку, получаем, что $z_{k+1} - z_k \le 0$. В частности, $z_k \le z_0$ для всех k. Мы рассматриваем $\lambda < \dfrac{1}{n-1}$, т.е. $1 + \lambda > n\lambda$. В этом случае $z_k = (n+\mu)w_k - s_k$, где $\mu = \dfrac{1+\lambda}{\lambda} - n > 0$. Поэтому из неравенства

$$z_k = \mu w_k + (nw_k - s_k) \ge \mu w_k$$

следует, что $w_k \le \dfrac{z_0}{\mu}$ для всех k. Таким образом, положение самой правой блохи не превосходит некоторой константы (зависящей от n, λ и начального расположения блох, но не от последовательности ходов).

XXXI Международная физическая олимпиада

Задача 1

A: a) $y = L + \dfrac{mg}{k} + \sqrt{\dfrac{m^2g^2}{k^2} + 2\dfrac{Lmg}{k}}$; b) $v_m = \sqrt{2gL + \dfrac{mg^2}{k}}$;

c) $t = \sqrt{\dfrac{2L}{g}} + \sqrt{\dfrac{m}{k}}\left(\pi - \arccos\dfrac{1}{\sqrt{1 + 2kL/(mg)}}\right)$.

B: a) $T = \sqrt{T_1T_2}$; b) $A_m = cm\left(\sqrt{T_1} - \sqrt{T_2}\right)^2$;

c) $A_m = 20$ МДж.

C: a) $^{206}n = {}^{238}N\left(2^{t/4,5} - 1\right)$; b) $^{207}n = {}^{235}N\left(2^{t/0,71} - 1\right)$;

c) $1{,}20\cdot 10^{-2} = \dfrac{2^{\tau/4,5} - 1}{2^{\tau/0,71} - 1}$; d) $\tau \approx 5{,}38\cdot 10^9$ лет;

e) $\tau \approx 4{,}54\cdot 10^9$ лет.

D: a) $E = \dfrac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}$ при $r \le R$, $E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ при $r > R$;

b) $W = \dfrac{3Q^2}{20\pi\varepsilon_0 R}$.

E: $t \approx 1{,}1\cdot 10^6$ с.

Задача 2

a) $\dfrac{e}{m} = \dfrac{8\pi^2 U}{B_0^2 D^2}$; b) область B;

c) $W_{\max} \approx 638$ кэВ; d) $e/m = 1{,}70\cdot 10^{11}$ Кл/кг.

Задача 3

A: a) $\mu \approx 4{,}5\cdot 10^{-3}$ с$^{-1}$; b) $\omega_0 \approx 8{,}1\cdot 10^3$ с$^{-1}$; c) $\delta l \approx 4\cdot 10^{-6}$ м;