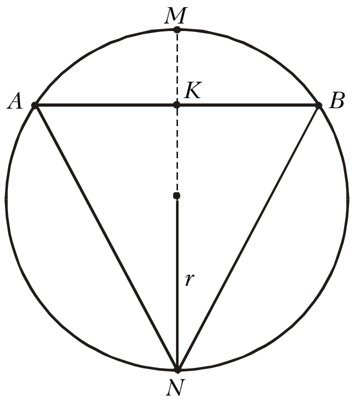

Рис. 13

5. $MA = MB = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. *Указание.* Точки A, B, M и N лежат на сфере, описанной около пирамиды $ABCN$, а также на единичной сфере с центром в точке C. Таким образом, эти четыре точки лежат на пересечении этих сфер, т.е. на окружности, описанной около равностороннего треугольника ABN; в частности, точка M лежит в плоскости грани ABN. Пусть K – середина стороны AB (рис.13). Тогда

$$MK = \frac{1}{2}r = \frac{1}{3}h = \frac{1}{2\sqrt{3}},$$

откуда

$$MA^2 = MB^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}.$$

Вариант 2

1. -39. Пусть a_1 – первый член последовательности, d – ее разность. Из соотношений

$$x = a_1 + 6d \text{ и } \frac{a_1 + a_{17}}{2}17 = 51$$

получаем, что $x + 2d = 3$. Пусть $-6x = a_n$. Тогда

$$n = \frac{7\dfrac{3-x}{2} - 7x}{\dfrac{3-x}{2}} = \frac{21(x-1)}{x-3}.$$

Поскольку при $x < -20$ верны неравенства

$$21 > \frac{21(x-1)}{x-3} > \frac{21\cdot 21}{23} > 19,$$

а число n – натуральное, то $n = 20$ и $x = -39$.

2. $2\pi k - \dfrac{5\pi}{6}$ и $\dfrac{2}{3}\pi k + \dfrac{5}{18}\pi$ при $k = 1, 2, \ldots$;

$-\dfrac{\pi}{18} - \dfrac{2}{3}\pi k$ и $\dfrac{\pi}{6} - 2\pi k$ при $k = 0, 1, \ldots$

3. $\left(\dfrac{4}{5}; \dfrac{9}{10}\right] \cup (1; 2]$. **4.** 3.

5. $CM = 5\sqrt{3}$ и $DM = 2\sqrt{3}$. *Указание.* Отрезки BM и DN параллельны. Проведем отрезок $MK \parallel AB$ (рис.14,*а*). Пусть $\alpha = \angle MDN = \angle ADN$. Тогда $\angle DMK = \dfrac{\pi}{2} - 2\alpha$, $\angle DKM = \dfrac{\pi}{2} + \alpha$. Четырехугольник $BMKN$ – параллелограмм, так что $MK = BN = 2$. По теореме синусов находим из

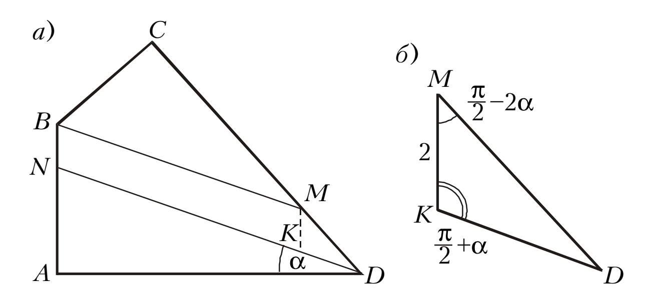

Рис. 14

треугольника DKM (рис.14,*б*), что $DK = \dfrac{2\cos 2\alpha}{\sin\alpha}$. Поскольку $ND\sin\alpha = 6$, а $ND = NK + KD = 10 + KD$, то $6 = 10\sin\alpha + 2\cos 2\alpha$, откуда

$$\sin\alpha = \frac{1}{2}.$$

Вариант 3

1. $\left[1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}\right]$. *Указание.* Сделав замены $x = \sqrt{2}\cos t$ и $y = \sqrt{2}\sin t$, получим уравнение $\cos 2t + \sin 2t = a - 1$, которое имеет решения при $|a-1| \le \sqrt{2}$.

2. $-7/4$.

3. $\left[-1; -\dfrac{\pi}{4}\right) \cup \left(-\dfrac{\pi}{4}; 0\right) \cup \left[\dfrac{3}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$. **4.** $\dfrac{1}{2}\sqrt[4]{\dfrac{c^2S^2}{2S - c^2}}$.

Пусть $2a$ и $2b$ – длины сторон прямоугольника, d – расстояние от центра O окружности до диагонали AC. Суммируя площади треугольников ABO, BOC и AOC, получим, что

$$\pm d\sqrt{a^2 + b^2} + ab + a^2 = 2ab$$

(знак «минус» соответствует случаю, когда точка O лежит вне треугольника ABC). Поэтому

$$d = \frac{\left|a^2 - ab\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

следовательно,

$$c^2 = 4\left(a^2 - d^2\right) = \frac{8a^3b}{a^2 + b^2}.$$

В данном случае $a = r$, $b = \dfrac{S}{4r}$, так что

$$\frac{S^2c^2}{16r^2} = \left(2S - c^2\right)^2.$$

5. См. рис.15.

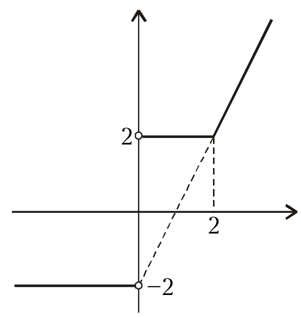

Рис. 15

Санкт-Петербургский государственный технический университет

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 0,3. **2.** -1. **3.** -2. **4.** -1. **5.** 5. **6.** 0. **7.** $\left(1+\sqrt{5}\right)/2$. **8.** $6 - 2\pi$.
9. -2. **10.** $\{1\} \cup \{\pi/2 + \pi k\}$, $k \in \mathbf{Z}$. **11.** 0,1. **12.** $(-\infty; -1] \cup \{1\}$.
13. $(-\infty; -4] \cup [3; 4)$. **14.** $\pm 0{,}5$. **15.** $(2; 1)$, $\left(3/\sqrt{2}; 0{,}5\right)$.
16. $(-2; -1)$. **17.** $(-1; 0)$, $(0; 1)$. **18.** 16. **19.** $5\sqrt{3}$.
20. $a \in \{1; -9\}$.

Знакомьтесь: факультет наук о материалах

МАТЕМАТИКА

1. $\{0; 1\}$. **2.** $\dfrac{\pi}{4} + (-1)^n\dfrac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.
3. $(-2; -1] \cup [2; 3)$. **4.** $(3; 1/9)$. **5.** 2.
6. Утверждение неверно. **7.** 6 км/ч. **8.** 115 км/ч.
9. $\{-6; -5; -4\}$. **10.** $x = 1$ и $y = 3{,}25(1 - x)$.

ФИЗИКА

1. $t = v_0(\sin\alpha \pm \operatorname{tg}\beta\cos\alpha)/g$, $\beta \in [0; \alpha]$.

2. $P_{экв}/P_{пол} = 1 - 4\pi^2R^3/\left(GMT^2\right)$.

3. $A = 0{,}5V_0\left(p_2 - p_1\right)\left(p_0 - p_1 - p_2\right)/\left(p_0 - p_1\right)$.