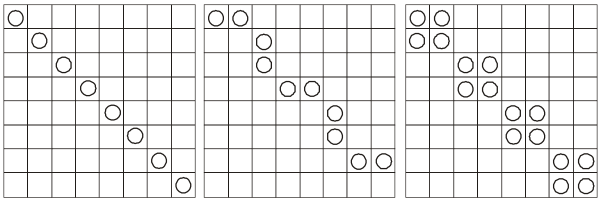
вертикали или горизонтали). Следовательно, число ладей не может превосходить $\frac{32}{4-n}$. Для $n = 0$, 1 и 2 получаем соответствующие значения максимального допустимого числа ладей: 8, 10 и 16.

Оказывается, все эти значения достигаются; примеры приведены на рисунке 1.



$n = 0$ $n = 1$ $n = 2$

Рис. 1

10. Обозначим школьников точками. Если два школьника обменялись адресами, то соединим соответствующие им точки линией. В полученной схеме (графе) будет 45 точек и 950 линий. Нужно доказать, что построенный граф является связным, т.е. можно перейти по линиям из любой точки в любую другую. Предположим, что это не так. Рассмотрим несвязный граф, который содержит наибольшее число линий между точками. Очевидно, что этот граф состоит из двух частей, в каждой из которых любые две точки соединены линией. Пусть в большей из частей будет k точек (значит, $k \geq 23$), тогда в меньшей их $(45-k)$. Число линий такого графа

$$k(k-1)/2+(45-k)(44-k)/2 = k^2-45k+45\cdot 22.$$

Значения построенного квадратного трехчлена растут с увеличением числа k. Наибольшее k, при котором граф является несвязным, равно 44. В таком графе будет 946 линий. А в графе, соответствующем условию задачи, 950 линий. Получено противоречие, т.е. исходный граф является связным. Следовательно, Маша может узнать адрес Ирины.

О пользе вневписанных окружностей

1. Исходя из теоремы 2, сумма периметров малых треугольников равна периметру большого. Значит, периметр исходного треугольника равен 48. А так как основание равно 12, то боковая сторона равна 18.

2. Пусть в данном треугольнике $AB = 12$, $AC = 10$ и $BC = 6$. Окружность, вписанная в данный треугольник, является вневписанной для отсеченного. Значит (по теореме 2), полупериметр отсеченного треугольника равен длине отрезка от вершины A до точки касания вписанной окружности, который равен разности полупериметра и стороны BC. Отсюда искомый периметр равен

$$\left((AB+AC+BC)/2-BC\right)\cdot 2 = 8\cdot 2 = 16.$$

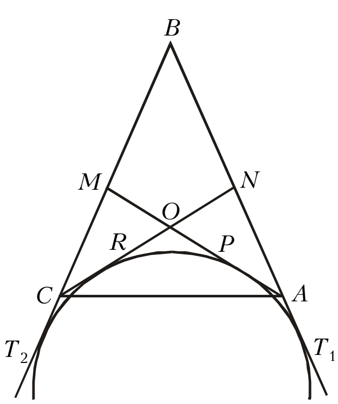


Рис. 2

3. Точка X совпадает с точкой касания вневписанной окружности. Доказательство вытекает из теоремы 4.

4. Очевидно, что мы можем построить на сторонах данного угла A точки T_1 и T_2 – точки касания вневписанной окружности. Восставив к сторонам угла перпендикуляры в точках T_1 и T_2, найдем центр вневписанной окружности. Под данным углом B проводим касательную к построенной вневписанной окружности (при помощи гомотетии). Эта касательная отсекает от сторон угла искомый треугольник.

5. По условию $AM + AN = CM + CN$, следовательно, периметры треугольников BNC и BAM равны. Значит, они имеют общую вневписанную окружность (рис.2). Пусть эта окружность касается прямых BC и BA в точках T_2 и T_1, а прямых AM и CN в точках P и R. Тогда $AB + AP = BC + CR = BT_2$. И так как $OP = OR$, то $AO + AB = CO + CB$, что и требовалось доказать.

6. Так как $AM = 2MM_1$ (M – центроид, M_1 – середина BC), то положение точки M_1 известно. Далее воспользуемся теоремой 4. В треугольнике TKR отрезок M_1O – средняя линия (O – инцентр), значит, $OM_1 \parallel RT$ (рис.3). Очевидно, что для точки N – середины RT – выполняется условие $\angle ONM_1 = 90°$. Следовательно, точку N мы можем построить как точку пересечения прямой, проходящей через точку A параллельно M_1O, и полуокружности, построенной на отрезке M_1O как на диаметре. Далее, проведя через точку M_1 прямую, параллельную отрезку NO, мы получим прямую, содержащую сторону BC. Остается построить вписанную окружность и провести из точки A к ней касательные до пересечения с прямой BC. Заметим, что полуокружность с диаметром M_1O пересекает RT дважды, что соответствует двум различным решениям задачи.

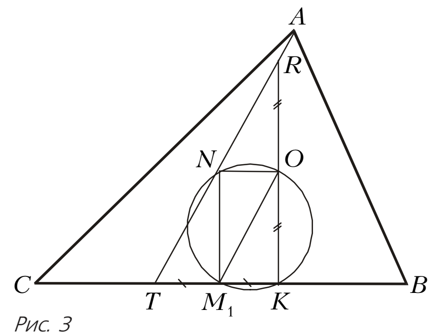


Рис. 3

Институт криптографии, связи и информатики Академии ФСБ

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. $\frac{4r-280}{90-r}$, $r \in \left[70; 76\frac{2}{3}\right]$.

2. При $a < 0$ уравнение не имеет решений, при $a = 0$ и при $a > 4$ уравнение имеет два решения, при $0 < a < 4$ уравнение имеет четыре решения, при $a = 4$ уравнение имеет три решения.

3. $\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

4. $\left(-\frac{1+\sqrt{29}}{2}; -3\right] \cup \left[3; \frac{1+\sqrt{29}}{2}\right)$. **5.** $2R\sqrt{1-\frac{4\sin^2\alpha/2}{3}}$.

Вариант 2

1. 12. **2.** $(2;3)$, $(3;2)$, $\left(\frac{-7\pm\sqrt{73}}{2}; \frac{-7\mp\sqrt{73}}{2}\right)$.

Указание. Поскольку $c = 1$, уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} xy-(x+y) = 1, \\ xy(xy+x+y+1) = 72. \end{cases}$$

3. $\frac{2\pi}{15}n$, $n \neq 15t$, $n,t \in \boldsymbol{Z}$; $\frac{\pi}{17}+\frac{2\pi}{17}k$, $k \neq 8+17t$, $k,t \in \boldsymbol{Z}$.

4. $\left(-\left(3+\log_5 3\right) \pm \sqrt{5+\log_5^2 3+6\log_5 3}\right)\Big/2$. **5.** 3 :10.

Вариант 3

1. 6. **2.** −99; −19; −17; 63.

3. $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. **4.** $(-4; 4)$. **5.** $1/2$.