«Квант» для младших школьников

Задачи

(см. «Квант» №1)

1. Если бы у Коли было на 3 пирожка больше, то всем досталось бы поровну – по 11 пирожков. Итак, вначале было 22 пирожка, и после окончательного дележа каждому досталось по 10 пирожков.

2. Найдем все двузначные числа вида $\overline{ab} = 10a + b$, где a, b – цифры ($a \neq 0$), которые делятся на сумму квадратов своих цифр: $10a + b = m\left(a^2 + b^2\right)$, $m \neq 0$, m – целое. Рассматривая последнее равенство как квадратное уравнение относительно переменной a, находим

$$a = \frac{5 \pm \sqrt{25 - bm(bm-1)}}{m}.$$

Обозначим $bm = k$ и найдем возможные значения целой переменной $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, при которых значение подкоренного выражения $25 - k(k-1)$ равно точному квадрату. Легко убедиться, что это может быть только при $k = 0$ или $k = 1$.

Если $k = 0$, то $b = 0$ и $a = \dfrac{10}{m}$. При $m = 2, 5, 10$ получаем три возможных значения для переменной a: $a = 5, 2, 1$ и, соответственно, три ответа: 50; 20; 10.

Если $k = 1$, то $b = m = 1$ и допустимых значений для цифры a не существует.

3. По условию, в каждом округе может находиться не более 13 субъектов, и, таким образом, в семи округах – не более чем $7 \times 13 = 91$ субъект. Болотный и Холмистый округа имеют менее 13 субъектов, поэтому во всей Федерации не более 89 субъектов, причем последнее количество достигается лишь в том случае, если все остальные округа (кроме Болотного и Холмистого) имеют по 13 субъектов.

Итак, в Снежном и Пустынном округах субъектов поровну.

4. Обозначим длину аквариума через a, ширину – b, а высоту – c. Поскольку занимаемый воздухом в аквариуме объем один и тот же, независимо от его положения, то

$$3bc = 3ac = 3ab.$$

Отсюда $a = b = c$ и, таким образом, аквариум имеет форму куба.

5. Упорядочим гири по массе и положим на левую чашку весов пять самых легких гирь с общей массой m, а на правую чашку – пять самых тяжелых гирь с общей массой M. Выровняем весы, добавив на обе чашки по 5 гирь. Масса пяти добавочных гирь на левой чашке весов при этом не будет превышать M, а масса пяти добавочных гирь на правой чашке весов будет не меньше m. Если весы оказались в равновесии, то масса гирь на каждой чаше весов в точности равна $M + m$, причем масса добавочных гирь на правой чашке равна m, а масса добавочных гирь на левой чашке равна M. Рассмотрим два набора из пяти самых легких гирь на левой чашке весов массы m и равный ему по массе набор из пяти гирь на правой чашке весов. Если среди этих наборов будут различающиеся по массе гири, то равенства общих масс гирь в этих наборах не будет. Точно так же, рассматривая набор из пяти самых тяжелых гирь на правой чашке весов массы M и равный ему по массе набор из пяти гирь на левой чашке весов, приходим к выводу, что массы гирек в этих наборах равны.

Конкурс «Математика 6–8»

(см. «Квант» №5 за 2000 г.)

6. Оценим числитель и знаменатель левой части неравенства

$$\frac{(a+b)^2}{(c+d)^2} < 4.$$

Имеем

$$(a+b)^2 > a^2 + b^2,$$

$$(c+d)^2 = c^2 + d^2 + 2cd \le \left(c^2 + d^2\right) + \left(c^2 + d^2\right) = 2\left(c^2 + d^2\right).$$

Следовательно,

$$\frac{(a+b)^2}{(c+d)^2} > \frac{a^2 + b^2}{2\left(c^2 + d^2\right)},$$

а значит,

$$4 > \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2}.$$

7. Обозначим искомые числа a, b, c, d. По условию, числа abc, bcd, cda – квадраты целых чисел, следовательно, их произведение – число $a^2b^2c^3d^2$ – также квадрат целого числа. Отсюда заключаем, что число c^3 – квадрат целого числа и, следовательно, квадратом целого числа является число c. Докажем это.

Разложив число c на простые множители, $c = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, запишем равенство куба этого числа некоторому квадрату целого числа:

$$c^3 = p_1^{3\alpha_1} p_2^{3\alpha_2} \ldots p_k^{3\alpha_k} = p_1^{2\beta_1} p_2^{2\beta_2} \ldots p_k^{2\beta_k}.$$

Из равенства степеней простых множителей в этих двух разложениях заключаем, что $3\alpha_i = 2\beta_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Следовательно, все числа α_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, – четные: $\alpha_i = 2\gamma_i$. Отсюда $c = \left(p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} \ldots p_k^{\gamma_k}\right)^2$ – квадрат целого числа.

Рассмотрев группу чисел abc, bcd, abd, точно так же заключаем, что число b – квадрат целого числа. Воспользовавшись другими перестановками (abc, bcd, acd для числа c; abd, bcd, acd для числа d), делаем вывод, что числа c и d также являются квадратами целых чисел.

8. Рассмотрим треугольник ABC, вокруг которого описана окружность O. Пусть D – точка пересечения биссектрис двух внешних углов этого треугольника с вершинами B и C, I – центр вписанной окружности треугольника ABC. Поскольку $\angle IBD = \angle ICD = 90°$, то точки I, B, D и C лежат на некоторой окружности O'. Если бы точка D лежала на окружности O, то окружности O и O' совпадали бы по трем точкам. Но это невозможно, так как очевидно, что окружности O и O' различны.

Итак, две биссектрисы внешних углов треугольника не могут пересекаться на его описанной окружности.

9. Выберем *самую нижнюю* горизонталь доски, на которой стоят ладьи, и рассмотрим *самую правую* ладью на этой горизонтали. Обратим внимание, что *ниже* этой ладьи (на той же вертикали) и *правее* этой ладьи (на той же горизонтали) ладей нет, поэтому она может угрожать не более чем двум ладьям (расположенным левее ее на той же горизонтали и выше ее на той же вертикали). Таким образом, $n \le 2$.

Задачу можно решить для всех $n \le 2$.

Для этого рассмотрим поля доски, примыкающие к ее наружной границе. Каждое такое поле – квадрат, одна сторона которого (а для угловых полей – даже две) совпадает с наружной границей доски. Назовем такие стороны *наружными отрезками.* Всего на доске, как видно, $8 \times 4 = 32$ наружных отрезка.

Пусть на доске расставлено несколько ладей так, что каждая из них угрожает ровно n другим ладьям. Заметим, что любая ладья ведет «обстрел» по четырем направлениям: влево, вправо, вверх и вниз от поля, которое занимает. Если при этом ровно n других ладей попадает под ее удар, то это значит, что в n из этих четырех направлений «выстрел» ладьи попадает в другую ладью, а в остальных $(4-n)$ направлениях «выстрел» попадает на наружный отрезок. Кроме того, каждый наружный отрезок может обстреливаться не более чем одной ладьей (той, что находится ближе к нему в той же