посадочной авиалинией. Когда-то все авиалинии были государственными. 1 января каждого года правительство выбирает не более 1999 государственных авиалиний и продает их частным авиакомпаниям. После этого 1 мая парламент выбирает один из городов и возвращает государству все частные авиалинии, выходящие из этого города. Докажите, что правительство может действовать так, чтобы к некоторому моменту не менее 99% авиалиний оказались частными. (7)

А.Пастор

7. В клетках таблицы 100×100 расставлены числа так, что в любом квадрате размером 2×2 суммы чисел, стоящих в противоположных углах квадрата, равны. Докажите, что и в любом прямоугольнике суммы чисел, стоящих в противоположных углах, равны. (7)

С.Берлов

8. В Однобоком графстве между некоторыми (но не всеми) усадьбами проложены дороги с односторонним движением. Известно, что если построить любую новую дорогу (также с односторонним движением) между усадьбами, не соединенными (ни в одном направлении) дорогой до этого, то можно будет добраться от любой усадьбы до любой другой, не нарушая правил. Докажите, что это возможно уже сейчас. (7)

Д.Ростовский

9. Написанное на доске число n можно заменить на одно из чисел $2n - 4$, $3n - 8$ или $8 - n$. Можно ли за несколько таких операций из числа 41 получить число, большее 10000000, но меньшее 10000020? (7–8)

Ф.Петров

10. Каждый день в группе из нечетного числа людей трое выходят на дежурство. Докажите, что можно составить такой график, что через некоторое время любые два человека трижды подежурят вместе. (7–8)

А.Косовская

11. а) Вдоль дороги с каждой стороны посадили по 1000 деревьев. На каждое дерево повесили табличку, в которой указано, сколько дубов в множестве деревьев, состоящем из этого дерева и его соседей слева и справа (у крайних деревьев – из самого дерева и его единственного соседа). Оказалось, что две последовательности чисел на табличках совпадают. Докажите, что в обоих рядах дубы растут на одних и тех же местах. (9)

б) Каждый месяц лесник Ермолай сажал вдоль забора ряд из 2000 деревьев и на каждое дерево вешал табличку с указанием, сколько дубов в множестве деревьев, состоящем из самого дерева, его левого и правого соседей. Таким образом получалась последовательность из 2000 чисел. Сколько различных последовательностей мог получить лесник Ермолай? (9)

А.Храбров, Д.Ростовский

12. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1.

а) На высоте AA_1 выбрана такая точка D, что $A_1D = B_1D$. Точка E – середина стороны AB. Докажите, что точки A, B_1, D и E лежат на одной окружности. (9)

б) Пусть точки K и M – середины отрезков AB и A_1B_1 соответственно, а отрезки AA_1 и KM пересекаются в точке L. Докажите, что точки A, B_1, K и L лежат на одной окружности. (10)

С.Берлов

13. Пусть $f(x) = x^{2000} - x^{1000} + 1$. Существуют ли такие различные натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_{2001}$, что $f(a_i)f(a_j)$ делится на a_ia_j при всех $i \neq j$? (9)

А.Баранов

14. На координатной плоскости проведена 101 прямая и отмечены все точки их пересечений. Может ли быть так, что на каждой из проведенных прямых лежат 50 отмеченных точек с положительными абсциссами и 50 – с отрицательными? (9–10)

С.Иванов

15. На доске написаны натуральные числа 1, 2, …, 2000. Два игрока поочередно делают ходы по следующим правилам. Разрешается стереть любые два числа a и b и написать вместо них a^b. Через некоторое время на доске останется одно число. Первый игрок выигрывает, если оно оканчивается на 2, 3, 7 или 8, а второй – в противном случае. Кто выиграет при правильной игре? (9)

В.Франк

16. Вневписанная окружность треугольника ABC касается его стороны BC в точке K, а продолжения стороны AB – в точке L (рис.2). Другая вневписанная окружность касается продолжений сторон BA и BC в точках M и N соответственно. Прямые KL и MN пересекаются в точке X. Докажите, что CX – биссектриса угла ACN. (9)

б) Одна из вневписанных окружностей треугольника ABC касается стороны AB и продолжений сторон CA и CB в точках C_1, B_1 и A_1 соответственно. Другая вневписанная окружность касается стороны AC и продолжений сторон BA и BC в точках B_2, C_2 и A_2 соответственно. Прямые A_1B_1 и A_2B_2 пересекаются в точке P, прямые A_1C_1 и A_2C_2 – в точке Q. Докажите, что точки A, P и Q лежат на одной прямой. (10)

С.Берлов

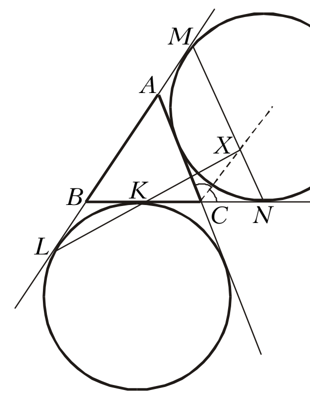

Рис. 2

17. Число N равно произведению 200 различных натуральных чисел. Докажите, что N имеет не меньше 19901 различных натуральных делителей (включая единицу и само число). (10)

А.Голованов

Отборочный тур на Всероссийскую олимпиаду

18. На координатной плоскости расположены 100 точек. Докажите, что существует не более $2025 = 45^2$ прямоугольников с вершинами в этих точках и со сторонами, параллельными осям. (9)

С.Иванов

19. Сеть авиалиний считается надежной, если после закрытия любого аэропорта из любого открытого аэропорта можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками). В стране 2000 аэропортов и изначально нет авиалиний. Две авиакомпании по очереди вводят новые беспосадочные авиалинии. Авиакомпания, после хода которой получается надежная сеть авиалиний, проигрывает. Какая из авиакомпаний выигрывает при правильной игре? (9)

Д.Карпов

20. На клетчатой плоскости лежит 111 не перекрывающихся друг с другом трехклеточных уголков. При этом выполняется такое свойство: для любого из уголков содержащий его квадрат 2×2 целиком покрыт уголками. Докажите, что можно убрать один или несколько уголков (но не все) так, чтобы это свойство сохранилось. (10)

А.Железняк, Ю.Белов