Если x может быть представлено конечной десятичной дробью, $g(x) = 0$. Для остальных чисел значение $g(x)$ будет зависеть от того, является ли последовательность $a_1, a_3, a_5, \ldots$ периодической. А именно, $g(x) = 0$, если число $0, a_1a_3a_5\ldots$ иррационально, и $g(x) = 0, a_{2n}a_{2n+2}a_{2n+4}\ldots$, если последовательность $a_1, a_3, a_5, \ldots$ периодическая, причем периодическое повторение начинается с цифры a_{2n-1}.

Построенная функция действительно принимает на каждом интервале $I \subset [0; 1]$ любое значение $y = 0, b_1b_2b_3\ldots$ Чтобы доказать это, выберем цифры $a_1, a_2, \ldots, a_{2n-2}$ так, чтобы числа $0, a_1a_2\ldots a_{2n-2}0$ и $0, a_1a_2\ldots a_{2n-2}1$ принадлежали интервалу I, причем цифра a_{2n-3} была отлична от 0 и 1. Далее, пусть $a_{2n-1} = a_{2n+1} = \ldots = a_{4n-5} = 0$ и $a_{4n-3} = 1$. Будем периодически повторять эти n цифр, располагая их на местах с нечетными номерами.

Итак, мы определили последовательность $a_1, a_3, a_5, \ldots$, период которой начинается именно с a_{2n-1}. Осталось заметить, что по определению

$$g(0, a_1a_2a_3\ldots a_{2n-1}b_2a_{2n+3}b_3a_{2n+5}\ldots) = 0, b_1b_2b_3\ldots = y.$$

Рассмотрим функцию

$$h(x) = \begin{cases} x^2\sin(1/x), & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Ее производная, равная

$$\begin{cases} 2x\sin(1/x) - \cos(1/x), & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

разрывна в точке $x = 0$.

Функция

$$k(x) = \begin{cases} x^4\left(2 + \sin\dfrac{1}{x}\right), & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

имеет абсолютный минимум в точке $x = 0$. А ее производная в любой окрестности нуля принимает как положительные, так и отрицательные значения. (Заметьте: функция k не монотонна ни в какой окрестности нуля!)

Функция, заданная формулой $x + 2x^2\sin(1/x)$ при $x \neq 0$ и равная 0 при $x = 0$, имеет в точке $x = 0$ производную 1, а при $x \neq 0$ производная равна $1 + 4x\sin\dfrac{1}{x} - 2\cos\dfrac{1}{x}$. Ничего особенного? Да нет же, это интересный пример: производная в точке 0 положительна, а функция не монотонна ни в какой окрестности нуля, поскольку производная в любой окрестности нуля принимает как положительные, так и отрицательные значения!

Функция, заданная формулой $x^2\sin(1/x^2)$ при $x \neq 0$ и равная 0 при $x = 0$, обладает тем интересным свойством, что ее производная, равная 0 при $x = 0$ и равная $2x\sin\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2}$ при $x \neq 0$, неограничена ни на какой окрестности нуля.

Последний и самый интересный пример – всюду непрерывная, но нигде не дифференцируемая функция. Такую функцию построил Карл Теодор Вильгельм Вейерштрасс (1815–1897):

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b^n\cos(a^n\pi x),$$

где a – целое нечетное число, а число b таково, что $0 < b < 1$ и $ab > 1 + \dfrac{3}{2}\pi$. (В 1916 году Годфри Харолд Харди (1877–1947) доказал, что достаточно потребовать $0 < b < 1$ и $ab > 1$.)

В 1930 году Бартел Лендерт Ван-дер-Варден придумал более простой пример такой функции. Обозначим через $\langle x\rangle$ расстояние от числа x до ближайшего целого числа. Другими словами, при $-\dfrac{1}{2} \le x \le \dfrac{1}{2}$ пусть $\langle x\rangle = |x|$, а дальше продолжим эту функцию периодически (с периодом 1).

Для любого целого неотрицательного числа n обозначим $f_n(x) = \langle 4^n x\rangle / 4^n$ и рассмотрим сумму

$$w(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$

Функция $w(x)$ непрерывна как сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций.

Пусть a – произвольное вещественное число. Для любого натурального числа n выберем $h_n = 1/4^{n+1}$ или $h_n = -1/4^{n+1}$ так, что $|f_n(a + h_n) - f_n(a)| = |h_n|$. Тогда разность $f_m(a + h_n) - f_m(a)$ равна 0 при $m > n$ и равна $\pm h_n$ при $m \le n$. Следовательно, отношение

$$\frac{w(a + h_n) - w(a)}{h_n}$$

является целым числом, которое четно при нечетном n и нечетно при четном n. Значит, предел

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{w(a + h_n) - w(a)}{h_n}$$

не существует, т.е. функция w не дифференцируема.

Функция Ван-дер-Вардена обладает еще одним интересным свойством. Пусть $x = k/4^n$, где k – целое число. Обозначим $h = 1/4^{2n+1}$. Тогда

$$w(x) = f_0(x) + f_1(x) + \ldots + f_{n-1}(x)$$

и

$$\begin{aligned} w(x+h) - w(x) &= (f_0(x+h) - f_0(x)) + \\ &+ (f_1(x+h) - f_1(x)) + \ldots + (f_{n-1}(x+h) - f(x)) + \\ &+ f_n(x+h) + f_{n+1}(x+h) + f_{n+2}(x+h) + \ldots \\ &\ldots + f_{2n}(x+h) \ge -nh + (n+1)h > 0. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$w(x-h) - w(x) \ge -hn + (n+1)h > 0.$$

Итак, $w(x-h) > w(x) < w(x+h)$. Поскольку точки вида $x = k/4^n$ всюду плотны, то не существует интервала, на котором функция w монотонна.

Ф.Спиров