удовлетворяет не только истинное движение камня вверх, но и обращенное во времени движение камня вниз, поэтому t_1 и t_2 – его корни. По теореме Виета получаем

$$s_x = -\frac{g_x t_1 t_2}{2}.$$

Аналогично, как истинное движение камня вниз, так и обращенное во времени его движение вверх удовлетворяют уравнению

$$s_y = u_{1y} t + \frac{g_y t^2}{2},$$

где u_{1y} – проекция на ось Y скорости камня сразу после отскока от крыши. В соответствии с теоремой Виета,

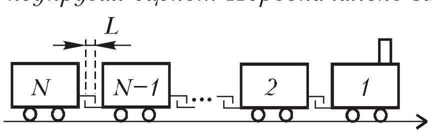
$$s_y = -\frac{g_y t_1 t_2}{2}.$$

Тогда искомое расстояние равно

$$s = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} = \frac{g t_1 t_2}{2}.$$

Д.Александров, В.Слободянин

Ф1759. *Длинный товарный поезд трогается с места. Вагоны соединены друг с другом с помощью абсолютно неупругих сцепок. Первоначально зазор в каждой сцепке равен L (см. рисунок). Масса локомотива m, а его порядковый номер первый. Все вагоны загружены, и масса каждого из них тоже m.*



1) Считая силу тяги локомотива постоянной и равной F, найдите время, за которое в движение будет вовлечено N вагонов.
2) Полагая, что состав очень длинный ($N \to \infty$), определите предельную скорость v_∞ локомотива.

1) Пусть v_i' – скорость части состава из i вагонов сразу после вовлечения в движение i-го вагона, а v_i – скорость части состава из i вагонов перед ударом с $(i+1)$-м вагоном. Из закона сохранения импульса

$$(i+1) m v_{i+1}' = i m v_i = p_i.$$

По второму закону Ньютона

$$a_{i+1} = \frac{F}{(i+1)m},$$

а по известному кинематическому соотношению

$$a_{i+1} L = \frac{v_{i+1}^2 - v_{i+1}'^2}{2}.$$

Отсюда получим

$$v_{i+1}^2 = \frac{2FL}{(i+1)m} + \left(\frac{i}{i+1}\right)^2 v_i^2,$$

или

$$p_{i+1}^2 = 2(i+1) mFL + p_i^2.$$

Из этой рекуррентной формулы следует

$$p_N^2 = 2mFL \sum_{i=1}^{N} i + p_0^2,$$

или, так как $p_0 = 0$,

$$p_N^2 = 2mFL \frac{N(N+1)}{2},$$

откуда

$$v_N = \sqrt{\frac{FL}{m}} \sqrt{\frac{N+1}{N}}.$$

Найдем теперь время t_N вовлечения в движение N вагонов:

$$v_i - v_i' = a_i \Delta t_i,$$

$$\Delta t_i = \frac{v_i - v_i'}{a_i} = \frac{m}{F}\left(i v_i - i v_i'\right) = \frac{m}{F}\left(i v_i - (i-1) v_{i-1}\right),$$

$$t_N = \frac{m}{F} \sum_{i=1}^{N-1} \left(i v_i - (i-1) v_{i-1}\right) =$$

$$= \frac{m}{F}\left((N-1) v_{N-1} - 0 \cdot v_0\right) = \frac{m}{F} v_{N-1} (N-1).$$

Используя полученное ранее выражение для v_N, окончательно получим

$$t_N = \sqrt{\frac{mL}{F}} N \sqrt{1 - \frac{1}{N}}.$$

2) Из выражения для v_N находим, что при $N \to \infty$ скорость состава $n_\infty \to \sqrt{FL/m}$.

П.Бойко, Ю.Полянский

Ф1760. *К двум точкам A и B, находящимся на одной горизонтали, между которыми расстояние 2a, прикреплена тонкая легкая нерастяжимая нить длиной 2l (рис.1). По нити без трения скользит маленькая тяжелая бусинка. Ускорение свободного падения g.*

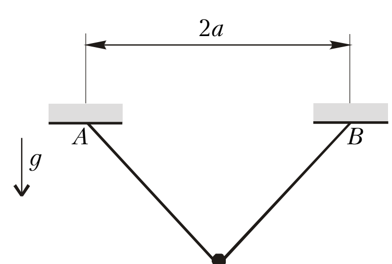


Рис.1

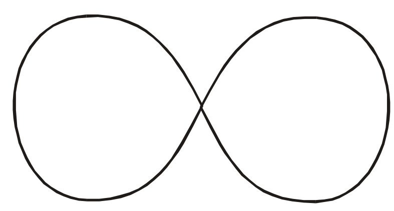


Рис.2

1) Найдите частоту малых колебаний бусинки $\omega_\perp$ в плоскости, перпендикулярной отрезку, соединяющему точки крепления нити.
2) Найдите частоту малых колебаний бусинки $\omega_\parallel$ в вертикальной плоскости, проходящей через точки крепления нити.
3) При каком отношении l/a траектория движения бусинки в проекции на горизонтальную плоскость может иметь вид, представленный на рисунке 2?
Примечание: при решении задачи вам может оказаться полезной формула

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \ldots$$

при x? 1.