Замечание. В статье А.Баабабова «Пентиум» хорошо, а ум лучше» («Квант» №4 за 1999 год) доказаны явные формулы:

$$a_n = \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}n\right] \text{ и } b_n = \left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}n\right].$$

в) Обозначим n-е слово рассматриваемой последовательности через w_n (т.е. $w_1 = А$, $w_2 = АБ$, $w_3 = АБАА$ и т.д.). Пусть h обозначает одновременную замену всех букв $А$ на $АБ$, а всех букв $Б$ – на $АА$. Докажем по индукции равенство

$$w_{n+2} = w_{n+1}w_n w_n. \qquad (\&)$$

(Например,

$$w_5 = АБАААБАБАБАААБАА$$

– это $w_4 = АБАААБАБ$, к которому дважды приписано слово $w_3 = АБАА$.)

База индукции. Слово $АБАА$ – это $АБ$, к которому приписаны две буквы $А$.

Индукционный переход. Если для некоторого n верно равенство (&), то

$$w_{n+3} = h\left(w_{n+2}\right) = h\left(w_{n+1}w_n w_n\right) =$$
$$= h\left(w_{n+1}\right)h\left(w_n\right)h\left(w_n\right) = w_{n+2}w_{n+1}w_{n+1},$$

что и требовалось доказать.

Итак, каждое слово w_n является началом следующего за ним слова w_{n+1}, так что существует бесконечное слово, началами которого являются все слова w_n.

А теперь заметьте: n-я буква $Б$ получается преобразованием h из n-й буквы $А$. Поскольку h превращает каждую букву в две, то номер места, на котором в бесконечном слове $АБАААБАБАБАААБАААБАААБАБАБАААБАБ$… стоит n-я буква $Б$, в два раза больше номера места, на котором стоит n-я буква $А$.

Замечание. Если начать с одной буквы $А$ и производить одновременные замены $А \mapsto А^k БА^l$ и $Б \mapsto А^m$, где k, m – натуральные числа, l – неотрицательное целое число, то по индукции легко доказать соотношение

$$w_{n+2} = w_{n+1}^k w_n^m w_{n+1}^l,$$

так что и в этом случае возникает бесконечное слово. Его n-я буква $Б$ тоже получается из n-й буквы $А$. Поскольку среди первых a_n букв имеется n букв $А$ и $a_n - n$ букв $Б$ и поскольку при рассматриваемой замене каждая буква $А$ переходит в $k+1+l$ букв, а $Б$ – в m букв, то первые a_n букв переходят в $(k+1+l)n + m(a_n - n)$ букв. Для нахождения b_n осталось заметить, что в слове $А^k БА^l$ буква $Б$ расположена не на последнем, а на $(l+1)$-м месте от конца. Поэтому

$$b_n = (k+1+l)n + m(a_n - n) - l.$$

Неожиданно, не правда ли? Есть ли еще замены, приводящие к интересным аналогичным законам, мы не знаем. Возможно, читатели помогут найти ответ на этот вопрос.

Е.Барский, А.Баабабов, Л.Коганов

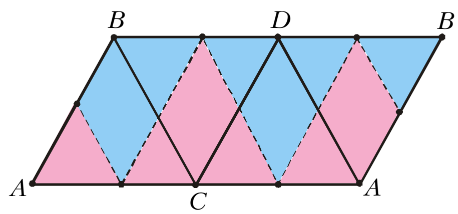
М1750. *а) Взяли шесть бумажных квадратов, у каждого из которых длина стороны равна 1, и ими целиком оклеили поверхность куба с ребром 1. Докажите, что найдется бумажный квадрат, который целиком оклеил какую-либо грань куба.*

б) Четырьмя бумажными равносторонними треугольниками, у каждого из которых длина стороны равна 1, целиком оклеили поверхность правильного тетраэдра с ребром 1. Обязательно ли найдется бумажный треугольник, который целиком оклеил какую-либо грань тетраэдра?

а) Обратим внимание на какую-либо, все равно какую, вершину куба. Так как сумма углов при ней равна 270°, найдется бумажный квадрат (хотя бы один), вершина которого совпала с этой вершиной куба.

Одним словом, у куба восемь вершин, и значит, не меньше восьми вершин у шести оклеивающих его бумажных квадратов совпадают с вершинами куба. Откуда следует, что найдется бумажный квадрат, у которого по крайней мере две вершины совпадают с вершинами куба. Но тогда ясно, что все четыре вершины этого бумажного квадрата совпадают с четырьмя вершинами какой-либо грани куба, т.е. эта грань целиком оклеена бумажным квадратом.

Можно дополнительно сообразить, что противоположная ей грань тоже непременно целиком оклеена каким-либо бумажным квадратом.



б) Вовсе необязательно. На рисунке показана развертка правильного тетраэдра $ABCD$ и такая его оклейка, что никакой из четырех бумажных треугольников не оклеивает целиком какую-либо грань этого тетраэдра.

В.Произволов

Ф1758. *Кот Леопольд стоял у края крыши сарая. Два злобных мышонка выстрелили в него из рогатки. Однако камень, описав дугу, через $t_1 = 1{,}2$ с упруго отразился от наклонного ската крыши сарая у самых лап кота и через $t_2 = 1{,}0$ с попал в лапу стрелявшего мышонка (рис.1). На каком расстоянии s от мышей находился кот Леопольд?*

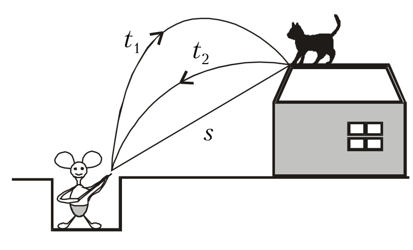


Рис.1

Пусть $\vec{u}_0$ – начальная скорость камня, $\vec{u}_1$ – скорость отскока камня от крыши и $\vec{u}_2$ – скорость, с которой камень попал в лапу мышонка. Направим ось X параллельно скату крыши, а ось Y – перпендикулярно ей (рис.2). На движении камня по оси X удар о крышу никак не сказывается; следовательно, оно равноускоренное и при этом $\left|u_{0x}\right| = \left|u_{2x}\right|$. Уравнению

$$s_x = u_{0x}t + \frac{g_x t^2}{2},$$

где g_x – проекция вектора ускорения свободного падения на ось X,

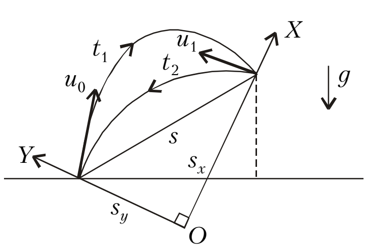


Рис.2