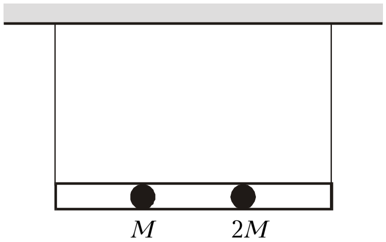

Рис.3

кий временной интервал стержень не успевает заметно сдвинуться.

Р.Старов

Ф1775. Тонкостенный горизонтальный цилиндрический медный сосуд разделен пополам массивным нетеплопроводящим поршнем (рис.4). С одной стороны от поршня находится разреженный кислород, с другой – гелий. Если сместить поршень немного из положения равновесия и отпустить, он будет совершать колебания. Во сколько раз может измениться период этих колебаний, если теплоизолировать сосуд от окружающей среды? Сосуд закреплен и двигаться не может.

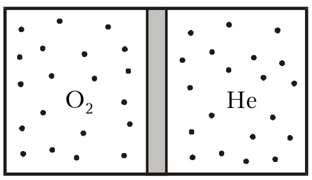

Рис.4

А.Диабатов

Ф1776. Маленький проводящий незаряженный шарик находится на большом расстоянии от точечного заряда Q. Во сколько раз изменится сила, действующая на шарик со стороны заряда, если расстояние между ними увеличить в два раза? Во сколько раз нужно будет увеличить диаметр шарика, чтобы вернуть силу взаимодействия к прежнему значению? Подсказка: помещенный в однородное (или почти однородное) поле проводящий незаряженный шарик похож на маленький диполь (маленький – по сравнению с диаметром шарика).

А.Повторов

Ф1777. Из двух конденсаторов с емкостями C и $2C$ и двух одинаковых катушек с индуктивностью L собрана схема, показанная на рисунке 5. Конденсатор емкостью C вначале заряжен до напряжения U. Дождемся момента, когда этот конденсатор окажется полностью разряженным, и соединим точки A и $Б$ проводящей перемычкой. Найдите максимальный ток через перемычку. Элементы цепи можно считать идеальными.

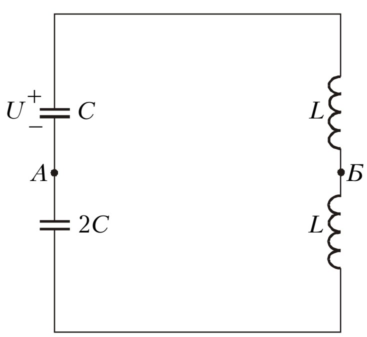

Рис.5

З.Рафаилов

Решения задач М1741—М1750, Ф1758–Ф1762

М1741. *С каждым из чисел от 000000 до 999999 поступим следующим образом: умножим первую цифру на 1, вторую на 2 и так далее, последнюю – на 6. Сумму полученных шести чисел назовем характеристикой исходного числа. Сколько чисел имеют характеристику, делящуюся на 7?*

Числа 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000 имеют различные остатки от деления на 7. Поэтому, если бы мы при подсчете характеристики множили последнюю цифру на 1, предпоследнюю на 10,…, первую на 10000, то ничего бы не изменилось. А при таком подсчете каждое число совпадает со своей характеристикой.

Количество чисел от 0 до 999999, которые делятся на 7, равно $999999/7+1$. Это число дает ответ на вопрос задачи.

Н.Васильев, Б.Гинзбург

М1742. *Таблица размером $n\times n$ заполнена натуральными числами так, что всякие два числа, соседние по горизонтали или по вертикали, различаются на 1. Докажите, что найдется натуральное число, которое присутствует либо на каждой горизонтали, либо на каждой вертикали.*

В доказательстве будем опираться на факт дискретной непрерывности устройства нашей таблицы. Это означает, что если в какой-либо строке таблицы присутствуют два числа a и b $(a<b)$, то любое промежуточное натуральное число c, $a\le c\le b$, тоже присутствует в этой строке. Естественно, что такое замечание справедливо и для столбцов.

В каждой строке возьмем минимальное число, и из полученных n чисел выберем максимальное число M. Пусть M является минимальным числом k-й строки.

Убедимся в том, что число M присутствует либо в каждой строке, либо в каждом столбце.

Допустим, что в i-й строке отсутствует число M. Но тогда все числа i-й строки меньше M. Возьмем произвольный столбец и покажем, что в нем присутствует число M. На пересечении этого столбца и i-й строки стоит число a, меньшее M. На пересечении этого столбца и k-й строки стоит число b, большее M. Следовательно, число M, $a\le M\le b$, непременно присутствует в избранном столбце, а значит, и в любом столбце.

В.Произволов

М1743. *Найдите сумму*

$$\left[\frac{1}{3}\right]+\left[\frac{2}{3}\right]+\left[\frac{2^2}{3}\right]+\ldots+\left[\frac{2^{1000}}{3}\right]$$

($[a]$ – целая часть числа a).

Ответ: $\dfrac{2^{1001}-2}{3}-500$.

Достаточно найти сумму дробных частей

$$s_1=\left\{\frac{1}{3}\right\}+\left\{\frac{2}{3}\right\}+\ldots+\left\{\frac{2^{1000}}{3}\right\}.$$

Имеем: $\left\{\frac{1}{3}\right\}=\frac{1}{3}$, $\left\{\frac{2}{3}\right\}=\frac{2}{3}$, $\left\{\frac{4}{3}\right\}=\frac{1}{3}$, $\left\{\frac{8}{3}\right\}=\frac{2}{3}$, … Следовательно,

$$s_1=501\cdot\frac{1}{3}+500\cdot\frac{2}{3}=500\frac{1}{3}.$$

Далее,

$$s=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\ldots+\frac{2^{1000}}{3}=\frac{1}{3}\left(2^{1001}-1\right).$$

Получили:

$$s_2=\left[\frac{1}{3}\right]+\left[\frac{2}{3}\right]+\ldots+\left[\frac{2^{1000}}{3}\right]=s-s_1=\frac{1}{3}\left(2^{1001}-2\right)-500.$$

А.Голованов, В.Сендеров