КВАНТ 2001/№1

Математика во второй половине XX века

В.ТИХОМИРОВ

Это – вторая статья о развитии математики в XX столетии. Первая была опубликована в нашем журнале два года тому назад («Математика в первой половине XX века» – «Квант» №1 за 1999 г.).

О современности писать сложнее, чем о прошлом. То, что случилось на твоем веку, нелегко оценивать глазами потомков. К тому же свершения в математике за последние полвека воистину грандиозны, и уложить их все в одну краткую статью невозможно. Моя цель здесь рассказать, в основном, о том, чему я был непосредственным свидетелем, хотя и при таком ограничении всего, разумеется, не исчерпать.

В статье есть несколько фрагментов, набранных петитом, где формулируются результаты и даются наброски их доказательств. Там не всегда удается ограничиться материалом, проходимым в школе. Но мне хотелось бы надеяться, что кому-то эти фрагменты будут понятны уже сейчас, кому-то – через недолгое время.

За эти полвека в мире произошли большие перемены. В частности, рухнул железный занавес, которым была ограждена наша страна от остального мира. Я писал в первой части своей статьи: «Во второй половине столетия математика стала приобретать характер истинно интернациональной науки».

До недавнего времени было принято писать: Вейерштрасс – немецкий математик, Коши – французский математик. Сейчас все не так просто. Как-то возник вопрос: как следует написать о национальной принадлежности известного математика Юргена Мозера. Послали ему письмо с этим вопросом. Ответ был такой: «Я родился и получил образование в Германии, имею американское гражданство, постоянно живу в Швейцарии»... Воистину для математиков весь мир стал единой страной.

Но это имело и последствия иного рода. Некоторые наши математические центры понесли большие потери – многие замечательные математики покинули нашу страну. В наибольшей мере это относится к Москве, которая на протяжении многих десятилетий была одним из основных мировых математических центров.

Иллюстрация П.Чернуского

Московская математика в 50–е годы

Пятидесятые годы были временем необычайного подъема московской математики. В связи с окончанием строительства Московского университета был значительно расширен прием на его механико-математический факультет. Престиж науки в тот период был высок, а наступившая оттепель породила великие надежды, которые во многом оправдались. Это все и привело к взлету математической науки у нас.

На мехмате в те годы сконцентрировались огромные научные силы. Вот кто читал основные курсы в пятидесятые годы: П.С.Александров и Б.Н.Делоне (аналитическая геометрия), А.Г.Курош и И.Р.Шафаревич (высшая алгебра), М.А.Лаврентьев и А.Я.Хинчин (математический анализ), Л.С.Понтрягин и В.В.Немыцкий (обыкновенные дифференциальные уравнения), М.В.Келдыш и А.О.Гельфонд (теория функций комплексного переменного), И.Г.Петровский, И.М.Гельфанд и С.Л.Соболев (уравнения с частными производными), А.Н.Колмогоров и Г.Е.Шилов (функциональный анализ), П.К.Рашевский и С.П.Фиников (дифференциальная геометрия), А.Н.Колмогоров и Ю.В.Прохоров (теория вероятностей), И.М.Гельфанд и Л.А.Люстерник (вариационное исчисление)... Все это крупнейшие ученые, большинство из них – лидеры целых направлений в математике. Если читателю суждено будет стать математиком, все названные мною имена станут ему известны как имена классиков нашей науки.

В те годы на мехмате работали замечательные семинары. Среди них «топологический кружок», основанный П.С.Александровым и П.С.Урысоном (в те годы руководимый Александровым), семинар по теории вероятностей, возглавляемый А.Н.Колмогоровым и А.Я.Хинчиным, семинары И.Г.Петровского, С.Л.Соболева и А.Н.Тихонова по уравнениям с частными производными, Д.Е.Меньшова и Н.К.Бари по теории функций, А.Г.Куроша по алгебре и многие другие. Выдающуюся роль во всей истории математики XX века сыграл семинар И.М. Гельфанда, где обсуждался широчайший круг проблем математики и естествознания.

В истории советской математики пятидесятых годов особо выделяются два имени – Колмогоров и Гельфанд. Они оказали огромное воздействие на развитие математики у нас в стране, да и во всем мире.

Здесь разумно сказать несколько слов о различиях творческих почерков этих двух выдающихся математиков. Однажды Гельфанд произнес такую фразу: «Математика – это марафон». И вне всякого сомнения сам Израиль Моисеевич является математиком-марафонцем. Как правило, жизненный путь крупных математиков можно разделить на периоды, в течение которых данный ученый работал над некоторой проблемой или теорией. Гельфанд начинал с функционального анализа, затем был период, посвященный банаховым алгебрам, потом – теории представлений (о пятидесятых-шестидесятых годах нам предстоит еще говорить).

А Колмогоров был «спринтером». Его стиль работы уникален. Колмогоров умел на коротком отрезке времени аккумулировать мощную энергию, которая, выделяясь, приводила к взрыву огромной силы, рушившему дотоле неприступные бастионы. Там образовывались бреши, в которые устремлялись толпы последователей. А сам Андрей Николаевич утрачивал интерес к этой теме и начинал думать о другом.

И еще. Колмогоров был ученым-одиночкой, он почти не имел совместных работ. У Гельфанда же почти все работы совместные. Причем он работал, как правило, с лидерами своих поколений (если вы спросите кого-нибудь из окончивших, скажем, мехмат МГУ, кто учился с ним на курсе, обычно называются две-три фамилии наиболее ярких студентов; их я и называю лидерами своих поколений). Соавторами Гельфанда были лидеры поколений, годы рождения которых разнятся на полвека! Эта особенность творческой биографии Гельфанда и его творческое долголетие беспримерны.

Широта научных интересов Колмогорова и Гельфанда была совершенно фантастичной. Колмогоровым в пятидесятые годы были получены выдающиеся результаты в небесной механике (в частности, построены начала КАМ-теории), решена (при участии В.И.Арнольда) 13-я проблема Гильберта, введено понятие энтропии динамической системы, совершившее переворот в теории динамических систем.[1] Скажем обо всем этом чуть подробнее.

Устойчивость планетных систем

Может ли планетная система сохранять устойчивость «на все времена»? Разве это не одна из центральных проблем всей натурфилософии? Ньютон установил, что планетная система, состоящая из двух тел, устойчива: спутник вращается вокруг планеты по эллипсу. Но уже для трех тел вопрос об устойчивости – до колмогоровских работ – оставался неясным, хотя проблема эволюции орбит в задаче трех тел занимала таких величайших ученых, как Ньютон, Лаплас и Пуанкаре. Пуанкаре называл один из частных случаев этой общей задачи *основной проблемой динамки.*

Колмогоров сделал важнейший шаг к частичному разрешению этой великой проблемы. Он придумал метод, с помощью которого оказалось возможным разрешить многие задачи математики и естествознания.

Для того чтобы понять замысел колмогоровского метода, нужно знать один важный факт из классического анализа – о разложимости 2π-периодических функций в ряд Фурье. Поставим такую задачу. Пусть нам заданы периодическая функция $y(t)$, разлагающаяся в ряд Фурье $\sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k e^{ikt}$, и некоторое число γ. Попробуем найти такую функцию $x(t)$, которая удовлетворяет уравнению $x(t+\gamma) - x(t) = y(t)$. Если представить функцию $x(t)$ тригонометрическим рядом $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{ikt}$, то оказывается необходимым разрешить следующую бесконечную систему уравнений: $x_k\left(e^{ik\gamma}-1\right) = y_k$. Если γ – число рациональное, k таково, что $e^{ik\gamma} = 1$, а $y_k \neq 0$, то разрешить k-е уравнение оказывается невозможным. Если же γ – число иррациональное, то $e^{ik\gamma} - 1 \neq 0$ для любых k, но при некоторых k эти числа бывают очень маленькими. Тогда сама бесконечная система разрешима: $x_k =$

[1] *О научной деятельности А.Н.Колмогорова можно прочитать в статье А.Н.Ширяева «Андрей Николаевич Колмогоров», опубликованной в книге «Колмогоров в воспоминаниях» (М., 1993).*

$= \left(e^{ik\gamma}-1\right)^{-1} y_k$, но в силу малости некоторых знаменателей $\left(e^{ik\gamma}-1\right)$ не при всяких $\left\{y_k\right\}$ ряд Фурье для функции $x(t)$ сойдется. Но если, с одной стороны, число γ не слишком хорошо приближается рациональными, а, с другой, числа y_k достаточно быстро убывают, то ряд Фурье сойдется, и наше уравнение окажется разрешимым. Однако в проблеме об эволюции орбит в задаче трех тел встречаются уравнения еще более сложные, когда надо решить уравнение $x\left(t+\gamma+\xi(t)\right) - x(t) = y(t)$, где $\xi(t)$ – некоторая известная функция, являющаяся малым возмущением поворота на угол γ. Метод Колмогорова состоял в том, чтобы решать такое уравнение, используя и технику работы с малыми знаменателями, и известный метод Ньютона решения уравнения $f(x) = y$. (Для данной задачи существенные результаты были получены Арнольдом.)

Метод Колмогорова был усовершенствован Владимиром Игоревичем Арнольдом и Юргеном Мозером (которого у нас уже был повод упомянуть). Он получил название КАМ-теории (теории Колмогорова—Арнольда—Мозера). КАМ-теория дала возможность разрешить очень большое число проблем, к которым не было ранее никакого подхода.

Проблема финальных движений

Но задача трех тел столь многогранна, что не представляется возможным ее когда-либо исчерпать. В прошедшем веке была разрешена еще одна известная проблема в задаче трех тел – *проблема финальных движений.* Она состоит в описании поведения трех тел, взаимодействующих между собой по закону всемирного тяготения, при $t \to -\infty$ и при $t \to +\infty$. Простейшие случаи, когда все расстояния между телами остаются ограниченными или когда, наоборот, все расстояния стремятся к бесконечности и в ту и в другую сторону, были известны еще Ньютону. Первые примеры «простых невозможностей» были обнаружены еще во времена Лапласа. Сама задача в явной форме была поставлена Якоби.

К тому моменту, когда А.Н.Колмогоров (в 1954 году) предложил своему студенту-третьекурснику Володе Алексееву курсовую работу на тему «Финальные движения в задаче трех тел», оставались логически допустимыми следующие возможности (все они реализуются и во взаимоотношениях между людьми): *обмен* (когда звезда прилетает из бесконечности и отрывает от другой звезды ее спутника); *частичный захват* (когда три звезды приближаются друг к другу из бесконечности, затем две образуют двойную звезду, а третья улетает); *полный захват* (когда двойная звезда захватывает третью, прилетевшую из бесконечности); *захват в осцилляцию* (когда тело прилетает к двойной звезде и начинает затем осциллировать, т.е. расстояние от этого тела до двойной звезды неограниченно, но не стремится к бесконечности); *двойная осцилляция* – осцилляция в прошлом и будущем; наконец, *переход из ограниченного движения в осцилляцию.*

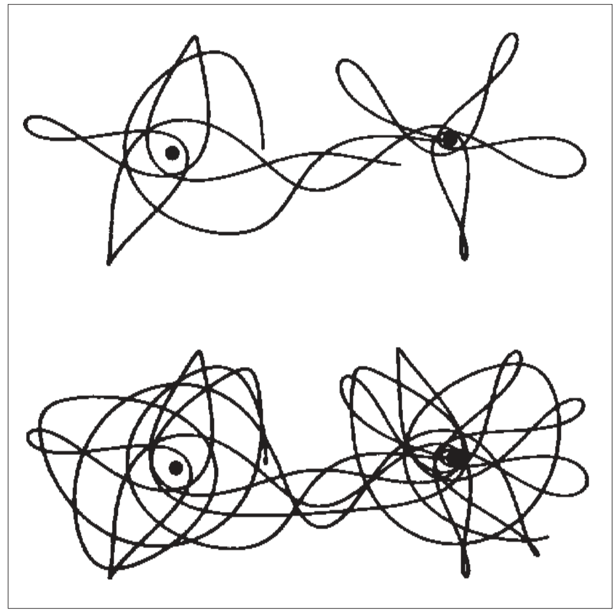

Рис.1. Типичная траектория решения задачи трех тел в небесной механике. Вверху показано начало, а внизу – дальнейшая эволюция хаотического движения малой планеты вокруг двух светил с равной массой

Каждая из перечисленных выше проблем (обмена, захвата и т.п.) представляла собой задачу большой трудности. В них (как писал Владимир Михайлович Алексеев) затрагивались проблемы, «возникающие в областях, где математика и механика граничат с философией: происхождение Солнечной системы, эволюция звездных скоплений и т.п.». В настоящее время проблема финальных движений полностью решена. В 1953 году К.А.Ситников доказал возможность частичного захвата, в 1959 году он же построил пример осцилляции. Возможность остальных финальных движений была доказана В.М.Алексеевым.

Решение задачи о финальных движениях потребовало разработки новых методов в теории динамических систем. Одно из крупнейших открытий в теории дифференциальных уравнений, имеющих грандиозные последствия для всей математики, состоит в том, что во многих динамических системах (т.е. системах, эволюция которых описывается дифференциальными уравнениями), несмотря на их полную детерминированность (когда будущее предопределяется настоящим), могут возникать движения, напоминающие случайные процессы. Это явление получило название «детерминированного хаоса». Истоки идеологии детерминированного хаоса относятся еще к началу века. Тогда в трудах Ж.Адамара, Дж.Биркгофа, Э.Хопфа, А.Пуанкаре и других было обнаружено возникновение хаотических свойств в процессах, определяемых дифференциальными уравнениями. В таких динамических системах имеется сильная неустойчивость, когда малые возмущения начальных условий приводят к большим отклонениям. К числу задач, для которых характерно явление детерминированного хаоса, относится все та же задача трех тел. С одной стороны, несомненно, что ньютонова механика позволяет вычислять траектории космических кораблей, комет и планет с большой точностью и на большие времена, но, с другой стороны, при огромных длительностях времени траектории их движения становятся непредсказуемыми (см. рис.1).

Фракталы

В восьмидесятые годы были раскрыты и другие грани непредсказуемости, связанные с динамически-

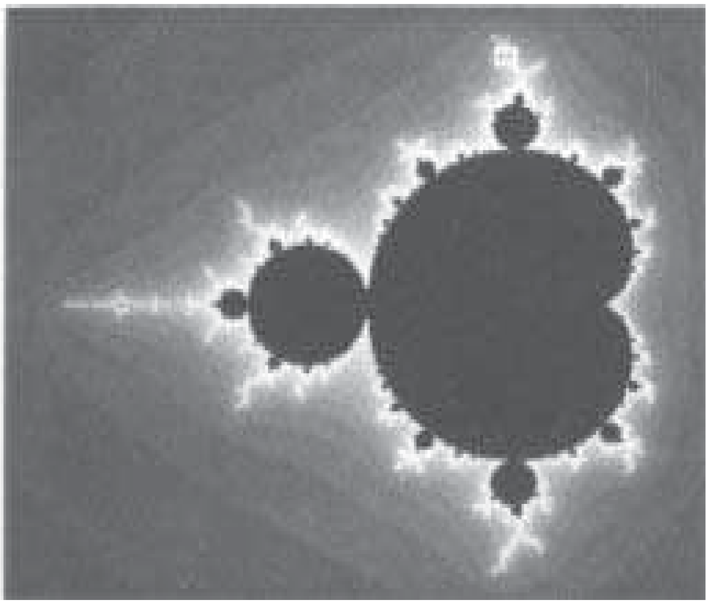

Рис.2. Множество Мандельброта

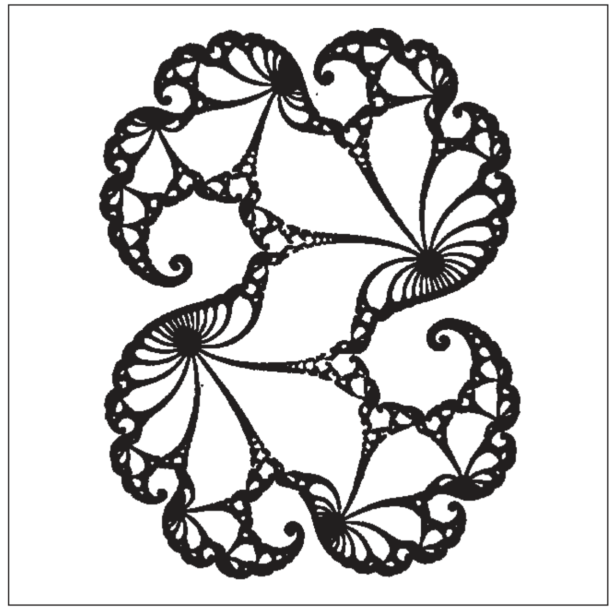

Рис.3. Множество Жюлиа

ми системами. Такие системы порождают узоры необыкновенной красоты. Честь открытия этих узоров принадлежит Бенуа Мандельброту (родившемуся в Варшаве, получившему степень доктора философии по математике в Париже, ныне профессору прикладной математики в Гарвардском университете).

На рисунке 2 изображено одно из «множеств Мандельброта». Эта необычайная картина получается из простейшего итерационного процесса, а именно такого: $z_{n+1} = z_n^2 + c$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, где c и z_0 – комплексные числа. Если положить $c = 0$ и взять z_0 внутри единичного круга, то числа z_n будут стремиться к нулю. В этом случае говорится, что нуль является *аттрактором* для нашей последовательности. Если $|z_0| > 1$, то последовательность z_n устремляется к бесконечности (т.е. и бесконечность является аттрактором). А если $|z_0| = 1$, то последовательность будет вечно блуждать по единичной окружности. Таким образом, единичная окружность является здесь границей двух областей, в каждой из которых точки последовательности притягиваются к своему аттрактору. Эта окружность называется множеством Жюлиа (по имени французского математика, изучавшего подобные множества еще во втором десятилетии прошедшего века). Множество Жюлиа для значения $c = -0{,}12 + 0{,}74i$ изображено на рисунке 3. Мандельброт же с помощью компьютера сумел нарисовать те множества c, при которых множество Жюлиа связно. Таким примером и является множество, изображенное на рисунке 2.

Множества Жюлиа и Мандельброта устроены весьма сложно, но вместе с тем они обладают рядом примечательных особенностей. В частности, множества Жюлиа «самоподобны»: фрагмент этого множества повторяет структуру всего множества в целом. Такого рода множества Мандельброт назвал *фракталами*.

Математика и космос

К числу величайших завоеваний XX века вне всякого сомнения следует отнести рождение космической эры. Здесь, разумеется, также не обошлось без математики. Родилась новая ветвь теории экстремума – теория оптимального управления[2] (лидерами его были у нас Л.С.Понтрягин, а в США – Р.Беллман), а также новая ветвь теоретической механики, получившая парадоксальное наименование – «прикладная небесная механика». Наличие мощных вычислительных средств позволило ставить численные эксперименты с небесными системами, подобными нашей Солнечной. Все планеты нашей системы движутся по почти круговым орбитам, лежащим почти в одной плоскости. А что было бы, если бы орбита Луны была перпендикулярна орбите Земли? Выяснилось, что Луна упала бы на Землю через четыре с половиной года! Наблюдение за поведением спутников позволило открыть ряд новых явлений природы, например «дыхание атмосферы» (на солнечной стороне линии равной плотности атмосферы вытягиваются в сторону Солнца и прижимаются к Земле на теневой стороне). Оба описанных факта – падение Луны и дыхание атмосферы – были открыты М.Л.Лидовым.

[2] *Теории экстремума и, в частности, теории оптимального управления посвящена моя книга «Рассказы о максимумах и минимумах» (Библиотечка «Квант», вып. 56).*