исходная система переписывается в виде

$$\begin{cases} y^2 - 3yu + 2v^2 = 0, \\ 5y^2 - 8yv + 3u^2 = 0. \end{cases}$$

Заметим, что $y = u = v = 0$ – ее решение. При $y \neq 0$ введем переменные $p = \dfrac{u}{y}$, $q = \dfrac{v}{y}$. Тогда

$$\begin{cases} 2q^2 - 3p + 1 = 0, \\ 3p^2 - 8q + 5 = 0, \end{cases}$$

откуда $p = q = 1$.
Итак, $y = u = v$ (в частности, последнему соотношению удовлетворяет найденное выше нулевое решение $y = u = v = 0$).
Таким образом, задача сводится к решению при всех значениях параметра a уравнения

$$\log_2\left(4x^2 + (14a - 10)x + 8a - 8\right) = \\ = \log_2\left|4x^2 + (6 - 2a)x + 4a^2 - 8a + 4\right|,$$

равносильного системе

$$\begin{cases} 2x^2 + (7a - 5)x + 4a - 4 = \\ = \left|2x^2 + (3 - a)x + 2a^2 - 4a + 2\right|, \\ 2x^2 + (7a - 5)x + 4a - 4 > 0. \end{cases}$$

Осталось рассмотреть 2 случая:

$$1)\ \begin{cases} 2x^2 + (7a - 5)x + 4a - 4 > 0, \\ 2x^2 + (7a - 5)x + 4a - 4 = \\ = 2x^2 + (3 - a)x + 2a - 4a + 2, \end{cases}$$

и

$$2)\ \begin{cases} 2x^2 + (7a - 5)x + 4a - 4 > 0, \\ 2x^2 + (7a - 5)x + 4a - 4 = \\ = -2x^2 - (3 - a)x - 2a^2 + 4a - 2. \end{cases}$$

6. $50\left(5\sqrt{2} \pm 4\right)$. *Указание.* Из точки O каждая из сторон треугольника ABC видна под прямым углом, т.е. точка O – вершина трехгранного угла, все плоские углы которого прямые, а треугольник ABC получается сечением этого угла некоторой плоскостью.
Треугольник ABC – остроугольный. Найдем сторону AC.
Пусть $\angle BAC = \alpha$, $\angle BCA = \beta$. По теореме синусов

$$\frac{20}{\sin\alpha} = \frac{15\sqrt{2}}{\sin\beta} = \frac{AC}{\sin(\alpha + \beta)} = 10\sqrt{5}.$$

Отсюда $AC = 5\sqrt{10}$, а $S_{\Delta ABC} = 150$.
Пусть OK – перпендикуляр, опущенный из O на плоскость ABC, h – его длина, $OA = x$, $OB = y$, $OC = z$. Из системы

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 450, \\ y^2 + z^2 = 400, \\ x^2 + z^2 = 250. \end{cases}$$

находим, что $x^2y^2z^2 = 150 \cdot 300 \cdot 100$, а из формулы для объема пирамиды $OABC$ находим $h = 5\sqrt{2}$.
Далее, трехгранный угол, образованный лучами OA, OB, OC, высекает из четвертой сферы с радиусом r и центром O одну восьмую ее часть. Тогда

$$\frac{4\pi r^2}{8} = 8\pi, \text{ т.е. } r = 4.$$

Так как вершина S пирамиды искомого объема является точкой касания четвертой сферы с плоскостью, параллельной ABC, то для высоты H пирамиды $SABC$ имеем либо $H = h + r$, либо $H = h - r$. Окончательно, $V_{SABC} = 50\left(5\sqrt{2} \pm 4\right)$.

Вариант 4

1. $\left[-\dfrac{\pi}{4}; +\infty\right) \cup \left(\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}\left[-\dfrac{\pi}{4} - \pi n; \dfrac{\pi}{4} - \pi n\right]\right)$. **2.** 90%.

3. $\left(-5; -2 - 2\sqrt{2}\right) \cup [-4; 0) \cup \left(0; \dfrac{1}{2}\right)$. *Указание.* Исходное неравенство переписывается в виде

$$\log_{(x+5)(1-x)}\left((x + 5)(1 - 2x)\right) \le \log_{1-x}(1 - 2x).$$

4. $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2}{3}\sqrt{12 \pm 3\sqrt{3}}\right)$. *Указание.* Пусть $\angle BAC = \gamma$ (рис.9). Пусть X и Y – точки пересечения прямых KL и KM с прямыми AB и AC соответственно. Возможны различные случаи расположения точек X и Y на прямых AB и AC (одна из таких конфигураций изображена пунктиром на рисунке 9). Однако при этом возможны только два варианта значений величины $\angle XAY$, а именно: $\angle XAY = \gamma$ или $\angle XAY = \pi - \gamma$. Пусть $\angle KXA = \alpha$ и $\angle KYA = \beta$. Пусть точка Z – проекция точки K на прямую XY. По теореме о трех перпендикулярах $AZ \perp XY$, значит, $\angle KZA = \varphi$ – искомый. Пусть $KA = a$, тогда $AX = a\operatorname{ctg}\alpha$, $AY = a\operatorname{ctg}\beta$,

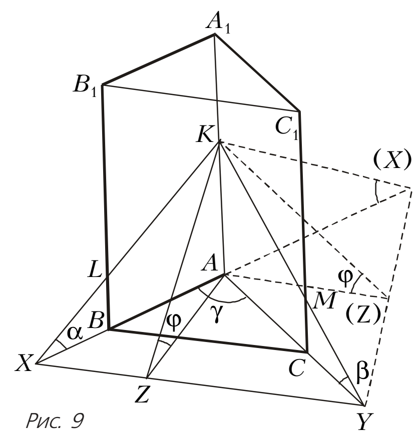

Рис. 9

$$2S_{\Delta AXY} = a^2 \operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta \sin\gamma.$$

По теореме косинусов

$$XY^2 = a^2\left(\operatorname{ctg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\beta \pm 2\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta \cos\gamma\right).$$

Следовательно,

$$AZ = \frac{2S_{\Delta AXY}}{XY}.$$

Из треугольника KAZ получаем выражение для $\operatorname{tg}\varphi$ через α, β, γ:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{\operatorname{ctg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\beta \pm 2\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta \cos\gamma}}{\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta \sin\gamma}.$$

Осталось подставить $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$, $\beta = \dfrac{\pi}{3}$ и $\gamma = \dfrac{\pi}{3}$.

5. 30. Положим $z = 4x^2 + 80x + y + 43$. Нахождение максимума z при заданных условиях эквивалентно определению максимального из значений z, при которых существует решение системы

$$\begin{cases} 4x^2 + 80x + y + 43 = z, \\ x^2 + 86x + y \ge -202, \\ 6x^2 + 32x + y \le -283. \end{cases}$$