

и

$$g(x, y, a) = x^2 + (y - a)(y + a).$$

а) При каком наименьшем положительном значении параметра a система уравнений

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ g(x, y, a) = 0 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения?

б) При этом значении параметра a найдите площадь фигуры, координаты $(x; y)$ всех точек которой удовлетворяют неравенству

$$\frac{f(x, y)}{g(x, y, a)} \leq 0.$$

Вариант 12

(отделение структурной и прикладной лингвистики филологического факультета)

1. Имеется 40 литров 0,5%-го раствора и 50 литров 2%-го раствора уксусной кислоты. Сколько нужно взять первого и сколько второго раствора, чтобы получить 30 литров 1,5%-го раствора уксусной кислоты?

2. Через центр окружности, вписанной в треугольник ABC , провели прямую MN параллельно основанию AB (M лежит на BC , N лежит на AC). Найдите периметр четырехугольника $ABMN$, если известно, что $AB = 5$, $MN = 3$.

3. Решите неравенство

$$\frac{1}{\log_2 x} + \frac{1}{2 - \log_2 x} \leq 2.$$

4. Решите систему

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1. \end{cases}$$

5. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнения

$$(2a - 1)x^2 + 6ax + 1 = 0$$

и

$$ax^2 - x + 1 = 0$$

имеют общий корень.

6. Расшифруйте шифровку

$$\begin{pmatrix} * & + & * & = & Л \\ - & & \times & & .. \\ * & + & * & = & О \\ || & & || & & || \\ Д & : & У & : & Б \end{pmatrix}.$$

Про шифровку известно, что в ней
1) буквы и звездочки означают цифры;
2) разные буквы означают разные цифры;
3) звездочки могут означать любые цифры.

Вариант 13

(отделение экономики экономического факультета)

1. Решите уравнение

$$3\sqrt{x^2 - 4x + 4} - 4 - x = \left(\sqrt{-x^2 + x + 2}\right)^2.$$

2. Интервалы движения морских катеров по трем маршрутам, начинающимся на общей пристани, составляют 30, 36 и 45 минут соответственно. Сколько раз с 7^{40} до 17^{35} того же дня на этой пристани одновременно встречаются катера всех трех маршрутов, если одна из таких встреч происходит в 11^{15} ?

3. Решите неравенство

$$\frac{\log_7 12}{\log_7(x^2 - 9)} \geq \frac{\log_5(x^2 + 8x + 12)}{\log_5(x^2 - 9)}.$$

4. Точка Q расположена на стороне MN треугольника LMN так, что $NQ : QM = 1 : 2$. При повороте этого треугольника на некоторый угол вокруг точки Q вершина L переходит в вершину N , а вершина M – в точку P , лежащую на продолжении стороны LM за точку L . Найдите углы треугольника LMN .

5. Найдите все значения x , при которых числа

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt[3]{5}\right)^{3\cos\left(5x + \frac{3\pi}{4}\right)}, \\ & \left(\frac{1}{5}\right)^{\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)}, \\ & 5^{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)} \end{aligned}$$

в указанном порядке составляют возрастающую геометрическую прогрессию.

6. Центр шара с радиусом 1 совпадает с основанием высоты правильной четырехугольной пирамиды. Найдите площадь той части поверхности пирамиды, которая лежит вне этого шара, если высота пирамиды равна $2\sqrt{2}$, а плоские углы при вершине пирамиды равны $\arccos\left(\frac{4}{5}\right)$.

7. Про функцию $f(x)$ известно, что она определена на отрезке $\left[\frac{1}{6}; 6\right]$ и

удовлетворяет на этом множестве системе

$$\begin{cases} \frac{1}{\cos^2 f(x) - \frac{1}{2}} - 12 \cos\left(2f\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{10}{x}, \\ 0 \leq f(x) \leq \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Решите неравенство $f(x) \leq \frac{\pi}{8}$.

Вариант 14

(факультет психологии)

1. Решите уравнение

$$4x \sin 3x = 3x + |x|.$$

2. Рассматриваются геометрические прогрессии, у каждой из которых первый член равен десяти, сумма второго и третьего членов – целое число, кратное четырем, и не превосходит одной тысячи, а знаменатель больше единицы. Укажите знаменатели всех таких прогрессий.

3. Два одинаковых поля требуется вспахать тремя тракторами. При работе в одиночку первый трактор вспахает одно поле вдвое быстрее, чем второй, а третьему трактору на эту же работу потребуется времени на два часа больше, чем первому. Работая вместе, все три трактора могут вспахать одно поле за семь часов двенадцать минут. Найдите наименьшее время, за которое можно вспахать оба поля при условии, что все трактора начинают работу одновременно, а для переезда с одного поля на другое любому трактору требуется сорок минут.

4. Решите неравенство

$$\begin{aligned} 2 + \log_{\sqrt{x^2 - 2x - 3}} \frac{x + 4}{x + 1} & \geq \\ & \geq \log_{(x^2 - 2x - 3)} (x^2 - 2x - 2)^2. \end{aligned}$$

5. В основании пирамиды $SABC$ лежит треугольник со сторонами $AB = AC = 5$ и $BC = 6$. Ребро SA перпендикулярно основанию пирамиды. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды, если известно, что отношение радиуса вписанной в пирамиду сферы к ребру SA равно $\frac{2}{7}$.

Вариант 15

(факультет социологии)

1. Решите уравнение

$$|x^2 - 3x| = 2x - 4.$$

2. В городе N в течение 2 лет наблюдался рост числа жителей. Во втором