

ности, описанной около этого треугольника, равен  $5\sqrt{5}$ . На сторонах треугольника  $ABC$  как на диаметрах построены три сферы, пересекающиеся в точке  $O$ . Точка  $O$  является центром четвертой сферы, причем вершина пирамиды  $S$  является точкой касания этой сферы с некоторой плоскостью, параллельной плоскости основания  $ABC$ . Площадь части четвертой сферы, которая заключена внутри трехгранного угла, образованного лучами  $OA$ ,  $OB$  и  $OC$ , равна  $8\pi$ . Найдите объем пирамиды  $SABC$ .

**Вариант 4**

(факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. Решите неравенство

$$\sin x \sin|x| \geq -\frac{1}{2}.$$

2. Имеется некоторое количество раствора соли в воде. После испарения из раствора одного литра воды концентрация соли возросла на 0,05, а после разведения получившегося раствора тридцатью девятью литрами воды концентрация соли стала в три раза меньше первоначальной. Найдите концентрацию соли в исходном растворе, считая массу 1 литра воды равной 1 кг.

3. Решите неравенство

$$\log_{5-4x-x^2}(5-9x-2x^2) \leq \log_{1-x}(1-2x).$$

4. На боковых ребрах  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  правильной треугольной призмы  $ABC A_1 B_1 C_1$  ( $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$ ) расположены точки  $K$ ,  $L$  и  $M$  соответственно. Известно, что угол между прямыми  $KL$  и  $AB$  равен  $\frac{\pi}{4}$ , а угол между прямыми  $KM$  и  $AC$  равен  $\frac{\pi}{3}$ . Найдите угол между плоскостью, проходящей через точки  $K$ ,  $L$  и  $M$ , и плоскостью основания  $ABC$ .

5. Найдите наибольшее значение выражения

$$4x^2 + 80x + y + 43$$

при условии, что

$$6x^2 + 32x + y + 283 \leq 0$$

и

$$x^2 + 86x + y + 202 \geq 0.$$

6. Вершины  $A$  и  $C$  параллелограмма  $ABCD$  лежат на одной окружности, а вершины  $B$  и  $D$  – на другой, причем центры окружностей лежат в плоско-

сти параллелограмма. Длины диагоналей параллелограмма равны 6 и 2 соответственно. Расстояние от точки пересечения диагоналей параллелограмма  $ABCD$  до прямой, проходящей через точки пересечения окружностей, равно 2. Найдите расстояние между центрами окружностей.

**Вариант 5**

(физический факультет, олимпиада «Абитуриент-2000», март)

1. Решите уравнение

$$\sin 5x + \sin 2x = \sin 7x.$$

2. Решите уравнение

$$3^{\sqrt{x-1}} - 10 \cdot 3^{-\sqrt{x-1}} = 1.$$

3. Решите неравенство

$$2x^2 + \sqrt{2x^3} > x.$$

4. В  $\triangle ABC$ , в котором  $AD$  – медиана,  $AD = m$ ,  $AB = a$ ,  $AC = b$ . Найдите  $\angle BAC$ .

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3\log x + \log_{\sqrt{5}} y = 3, \\ \log_5 (y - x - 2) + \log_{125} (y - x + 2)^3 = \log_3 12. \end{cases}$$

6. В правильной треугольной пирамиде высота равна 3, а объем равен  $9\sqrt{3}$ . Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды.

7. При каких значениях  $b$  уравнение

$$25^x - (2b + 5)5^{x+\frac{1}{x}} + 10b \cdot 5^{-\frac{2}{x}} = 0$$

имеет ровно два решения?

8. Из точки  $A$  проведены к окружности две касательные ( $M$  и  $N$  – точки касания) и секущая, пересекающая эту окружность в точках  $B$  и  $C$ , а хорду  $MN$  – в точке  $P$ ;  $AB : BC = 2 : 3$ . Найдите  $AP : PC$ .

**Вариант 6**

(физический факультет)

1. Решите уравнение

$$3 \cos 3x + \frac{2}{\cos x} = 3 \cos x.$$

2. Решите уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{x+2}} + \sqrt{x+2} = \sqrt{3x+1}.$$

3. Решите неравенство

$$\log_2 \frac{3x-2}{x-1} + 3 \log_8 \frac{(x-1)^3}{3x-2} < 1.$$

4. На стороне  $AC$  треугольника  $ABC$  взята точка  $A_1$ , а на продолжении

стороны  $BC$  взята точка  $C_1$  ( $C$  между  $B$  и  $C_1$ ), длина отрезка  $A_1C$  равна 85% длины стороны  $AC$ , а длина отрезка  $BC_1$  равна 120% длины стороны  $BC$ . Сколько процентов площади  $\triangle ABC$  составляет площадь  $\triangle A_1BC_1$ ?

5. Решите уравнение

$$3 \cdot \left| 3^{x-1} - 2 \right| + \left| 9^{\frac{x}{2}} - 3 \right| = 3.$$

6. В  $\triangle ABC$  точка  $O$  – центр описанной окружности,  $AB = a$ ,  $AC = b$ . Прямая  $BD$ , перпендикулярная прямой  $AO$ , пересекает сторону  $AC$  в точке  $D$ . Найдите  $CD$ .

7. При каких значениях  $a$  неравенство

$$(x^2 - (a+2)x - 2a^2 + 4a)\sqrt{1-x} \leq 0$$

имеет единственное решение?

8. Высота конуса равна 6, радиус основания равен 3. Точка  $A$  находится на расстоянии 3 от оси конуса и на расстоянии 4 от плоскости основания конуса. Прямая  $AB$  имеет с конусом единственную общую точку  $C$  и пересекает плоскость основания конуса в точке  $B$ . Расстояние от точки  $C$  до плоскости основания конуса равно 2. Найдите расстояние от точки  $B$  до вершины конуса.

**Вариант 7**

(химический факультет и факультет наук о материалах)

1. Решите уравнение

$$|x| = 2 - x.$$

2. Решите уравнение

$$\cos 3x + \sin x \sin 2x = 0.$$

3. Две бригады рабочих мостили два участка дороги (первая бригада – первый участок, вторая – второй), причем объем работ на втором участке был вдвое больше, чем на первом, а в первой бригаде было на 10 рабочих меньше, чем во второй. Производительность труда всех рабочих одинакова. Бригады одновременно начали работу, и когда первая бригада закончила работу, вторая еще работала. Какое наименьшее число рабочих могло быть в первой бригаде?

4. В угол вписано несколько окружностей, радиусы которых возрастают. Каждая следующая окружность касается предыдущей окружности. Найдите сумму длин второй и третьей окружностей, если радиус первой равен 1, а площадь круга, ограниченного четвертой окружностью, равна  $64\pi$ .

5. Треугольники  $DAB$ ,  $DAC$ ,  $DBC$ , представляющие собой боковые грани треугольной пирамиды, имеют одина-