ностью ρ. Напряженность поля вне шара, при $r > R$, совпадает с полем точечного заряда $q = \rho V$:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho V}{r^2}. \qquad (5)$$

Внутри шара, при $r < R$, вклад в напряженность дают только заряды, находящиеся внутри сферы радиусом r, а вклад внешних слоев равен нулю:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q(r)}{r^2} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0},$$

где $q(r) = \rho \cdot 4/3\,\pi r^3$. Для дальнейшего удобно записать последнюю формулу в векторном виде:

$$\vec{E} = \frac{\rho\vec{r}}{3\varepsilon_0}. \qquad (6)$$

2. Наложение двух шаров. Рассмотрим два равномерно заряженных по объему шара: один с объемной плотностью ρ, другой с объемной плотностью $-\rho$. Пусть шары расположены так, что расстояние l между их центрами меньше суммы их радиусов, т.е. существует область их пересечения (рис. 10). Объемная плотность

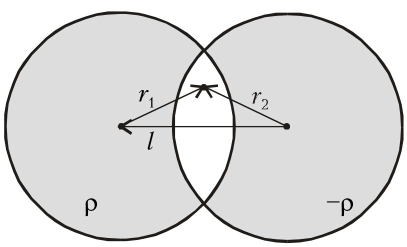

Рис. 10

заряда в этой области равна нулю, а поле равно суперпозиции полей двух шаров. Выберем произвольную точку в этой области и обозначим через $\vec{r}_1$ радиус-вектор, проведенный к этой точке из центра положительно заряженного шара, а через $\vec{r}_2$ – радиус-вектор, проведенный из центра отрицательно заряженного шара. В соответствии с формулой (6) получаем

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\rho\vec{r}_1}{3\varepsilon_0} - \frac{\rho\vec{r}_2}{3\varepsilon_0} = -\frac{\rho\vec{l}}{3\varepsilon_0}, \qquad (7)$$

где $\vec{l} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ — вектор, проведенный из центра отрицательно заряженного шара к центру положительно заряженного.

Мы установили, что поле в области пересечения двух разноименно заряженных (с одинаковой плотностью) шаров является однородным. Этот факт можно использовать для конструирования такого распределения зарядов по поверхности шара, которое уничтожит внешнее однородное поле. Покажем, как это сделать.

3. Шар в однородном поле. Рассмотрим два разноименно заряженных шара одного и того же радиуса R, центры которых смещены на малое расстояние l_0 (l_0 ? R). Заряд получившейся системы почти всюду равен нулю, кроме двух тонких равномерно заряженных сегментов (рис.11): одного с плотностью ρ, другого с плотностью $-\rho$. Толщина этих сегментов в

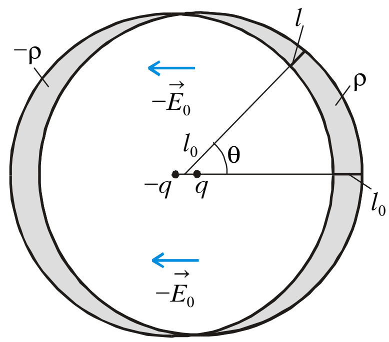

Рис. 11

самом толстом месте равна l_0 и уменьшается с углом θ по закону $l = l_0\cos\theta$. Ясно, как перейти к поверхностному заряду: надо рассмотреть предельный переход $l_0 \to 0$, но при этом так менять объемную плотность заряда ρ, чтобы заряд единицы поверхности, равный ρl_0, стремился к определенному пределу σ_0. Поскольку поле этих зарядов внутри полости должно уничтожать внешнее поле $\vec{E}_0$, в соответствии с формулой (7) получаем

$$-\frac{\rho\vec{l}_0}{3\varepsilon_0} = -\vec{E}_0$$

(вектор $\vec{l}_0$ проведен от центра отрицательного шара к центру положительного). Значит, предельное значение максимальной поверхностной плотности выражается через величину внешнего поля формулой

$$\sigma_0 = \rho l_0 \to 3\varepsilon_0 E_0,$$

совпадающей с формулой (2). Зависимость от угла θ тоже получается правильной: $\sigma = \rho l = \rho l_0\cos\theta = \sigma_0\cos\theta$. Кроме того, поле вне системы двух шаров совпадает с полем двух точечных зарядов $q = \rho V$ (см. формулу (5)) и в пределе переходит в поле точечного диполя с дипольным моментом

$$\vec{p} = q\vec{l}_0 = \rho V\vec{l}_0 \to 3V\varepsilon_0\vec{E}_0.$$

Приложение. Поле диполя

Чтобы вычислить поле точечного диполя, можно сначала написать точное выражение для поля двух зарядов q и $-q$, а потом расстояние между ними устремить к нулю. Однако лучше вычислить поле конечного диполя сразу на большом расстоянии от него (r ≅ l), где поля обоих диполей совпадают.

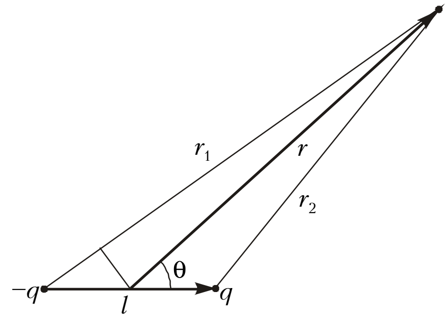

Рис. 12

Проще всего вычислить потенциал поля диполя. Обозначив расстояние до центра диполя через r, расстояние до отрицательного заряда r_1, а до положительного r_2, получим (рис.12)

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_2} - \frac{q}{r_1}\right) \approx$$

$$\approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r - \frac{l}{2}\cos\theta} - \frac{q}{r + \frac{l}{2}\cos\theta}\right) \approx$$

$$\approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ql\cos\theta}{r^2}.$$

Это выражение часто записывают через скалярное произведение:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left(\vec{p}\,\vec{r}\right)}{r^3}, \qquad (8)$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор, проведенный из центра диполя.

Для вычисления напряженности поля можно воспользоваться связью между напряженностью и потенциалом. Мы оставим это упражнение тем, кто уже научился уверенно дифференцировать сложные выражения, и покажем, как можно обойтись без этого.

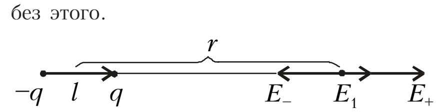

Рис. 13

Вычислим сначала напряженность для двух простых случаев – когда точка поля лежит на одной линии с зарядами (рис 13):

$$E_1 = E_+ - E_- =$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{(r - l/2)^2} - \frac{q}{(r + l/2)^2}\right) \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2ql}{r^3},$$

или в векторном виде:

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\vec{p}}{r^3}, \qquad (9)$$