# Проводящий шар в однородном поле

А.ЧЕРНОУЦАН

В этой статье мы рассмотрим одну-единственную задачу – о проводящем шаре, внесенном в однородное электрическое поле. Полное решение включает в себя как вычисление распределения заряда по поверхности шара, так и определение напряженности поля в окружающем пространстве. Трудность задачи состоит в том, что распределение заряда заранее не известно, и поэтому для вычисления поля нельзя просто воспользоваться методом суперпозиции.

Для полного или хотя бы частичного решения таких задач порой используют соображения симметрии, но в большинстве случаев приходится фактически угадывать ответ. В основе всех «угадывательных» подходов лежит *теорема единственности*, смысл которой состоит в том, что хорошо угаданное решение и есть единственно правильное. Иногда удается угадать распределение зарядов на проводнике, исходя из которого вычисляется поле, иногда наоборот — сначала угадывают поле, а потом уже вычисляют распределение заряда. Самым красивым методом угадывания (или подбора) решения является известный *метод электростатических изображений*, с помощью которого решаются такие важные задачи, как проводящая плоскость или проводящий шар в поле точечного заряда.

Задача о проводящем шаре в однородном поле интересна тем, что позволяет продемонстрировать несколько подходов, в том числе соображения симметрии и метод электростатических изображений. Однако начнем мы с того, что дадим точную формулировку задачи и сразу же приведем ее ответ — тот самый, который затем будем получать различными способами и с разных сторон.

## Формулировка и ответ

**Формулировка:**

В однородное поле с напряженностью $\vec{E}_0$ помещают незаряженный проводящий шар радиусом $R$.

а) Требуется найти распределение наведенного заряда по поверхности шара. Ясно, что поверхностная плотность заряда $\sigma$ может зависеть только от угла $\theta$, который образует с вектором $\vec{E}_0$ радиус, проведенный к данной точке поверхности (рис.1). Значит, ответ должен выражаться функцией $\sigma(\theta)$.

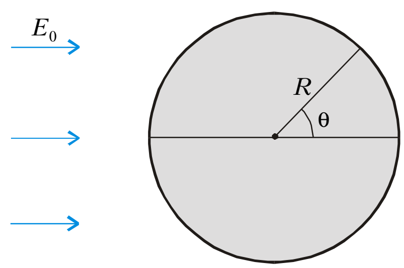


*Рис. 1*

б) Требуется определить поле, создаваемое этим наведенным зарядом в пространстве вне шара. Ответ должен выражаться либо функцией $\vec{E}_{\text{нав}}(r,\theta)$, где $r$ — расстояние от выбранной точки до центра шара ($r > R$), либо функцией $\varphi_{\text{нав}}(r,\theta)$, либо указанием алгоритма по их вычислению. Полная напряженность будет при этом равна $\vec{E} = \vec{E}_{\text{нав}} + \vec{E}_0$. Заметим, что так как полная напряженность внутри шара должна быть равна нулю, наведенный заряд при $r < R$ должен создавать напряженность $-\vec{E}_0$.

**Ответ**:

а) Зависимость поверхностной плотности заряда от угла $\theta$ имеет вид

$$\sigma = \sigma_0 \cos\theta, \qquad (1)$$

где максимальная плотность $\sigma_0$ выражается через напряженность $E_0$:

$$\sigma_0 = 3\varepsilon_0 E_0 \qquad (2)$$

($\varepsilon_0$ — электрическая постоянная).

б) Поле вне шара совпадает с полем *точечного диполя* с дипольным моментом

$$\vec{p} = 3V\varepsilon_0 \vec{E}_0 \qquad (3)$$

($V$ — объем шара), помещенного в центр шара.

Если вы успели забыть (или не успели узнать), что такое диполь и что такое дипольный момент, напоминаем: диполем называют систему двух точечных зарядов $q$ и $-q$, а дипольный момент $\vec{p}$ такого диполя равен $q\vec{l}$, где $\vec{l}$ — вектор, проведенный от отрицательного заряда к положительному. На большом расстоянии ($r >> l$) поле диполя определяется его дипольным моментом. Соответствующие формулы выведены в Приложении, а здесь нам осталось пояснить, что такое точечный диполь. Этот идеальный бесконечно малый объект получается предельным переходом $l \to 0$, $q \to \infty$, при котором величина дипольного момента $p = ql$ остается постоянной.

## Теорема единственности

Как уже было сказано, теорема единственности является важным подспорьем для всякого, кто пытается решить какую-нибудь не очень тривиальную задачу электростатики или хочет достаточно строго обосновать какое-нибудь утверждение. Поэтому мы сочли уместным выделить отдельный параграф для ее обсуждения.

Отметим, что задачи с проводниками могут формулироваться по-разному – для каждого из проводников может быть задан или его заряд, или его потенциал. Но в любом случае существует единственное решение поставленной задачи.

Для дальнейшего удобно «заготовить» две формулировки теоремы единственности.

**Первая формулировка**. Существует единственное *распределение зарядов* по поверхности проводников, при котором напряженность поля внутри проводника равна нулю, а заряды (или потенциалы) проводников равны заданным значениям. Исходя из такого подхода решается, например, задача о распределении заряда по поверхности тонкого проводящего диска (см. «Квант» №1 за 1998 г.).

**Вторая формулировка**. Существует единственное *распределение напряженности поля* в пространстве вне проводников, при котором поверхности проводников оказываются эквипотенциальными, а заряды (или потенциалы) проводников равны заданным значениям. Именно такой подход (подбор правильного поля) лежит в основе метода электростатических изображений (см. «Квант» №1 за 1996 г.).