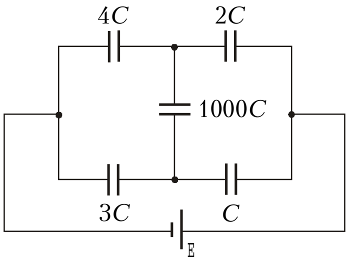


Рис.1

полученную оценку можно считать вполне удовлетворительной.

С.Варламов

Ф1753. *Оцените установившийся заряд на конденсаторе емкостью 1000 C в схеме, изображенной на рисунке 1.*

Из закона сохранения заряда следует, что заряды, образовавшиеся на всех конденсаторах, примерно одинаковы (по порядку величины). Однако разность потенциалов между обкладками конденсатора $1000C$ (точнее – емкостью $1000C$), ввиду его большой емкости, очень мала по сравнению с разностями потенциалов между обкладками других конденсаторов. Поэтому в нулевом приближении можно считать, что вместо конденсатора $1000C$ в схеме имеется проводящая перемычка. Тогда схему можно перерисовать в виде, показанном на рисунке 2.

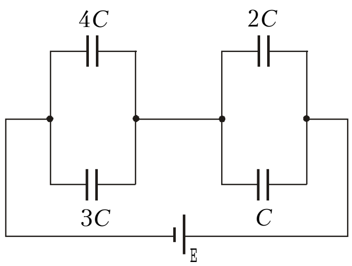


Рис.2

Пусть U_1 – напряжение на конденсаторах C и $2C$, U_2 – напряжение на конденсаторах $3C$ и $4C$. Из закона сохранения заряда следует, что суммарный заряд, находящийся на соединенных друг с другом обкладках конденсаторов, равен нулю, т.е.

$$3CU_2 + 4CU_2 = CU_1 + 2CU_1,$$

откуда получаем

$$U_2 = \frac{3}{7}U_1.$$

Учитывая, что

$$\mathcal{E} = U_1 + U_2,$$

находим

$$U_1 = 0{,}7\mathcal{E},\ U_2 = 0{,}3\mathcal{E}.$$

Теперь, после того как мы оценили величины напряжений на маленьких конденсаторах, можно вернуться к исходной схеме и оценить накопленный конденсаторами заряд. Заряд на конденсаторе $3C$ приближенно равен

$$q_1 = 3CU_2 = 0{,}9\mathcal{E}C,$$

а заряд на конденсаторе C –

$$q_2 = CU_1 = 0{,}7\mathcal{E}C.$$

Таким образом, заряд, накопленный конденсатором $1000C$, равен

$$q \approx q_1 - q_2 = 0{,}2\mathcal{E}C.$$

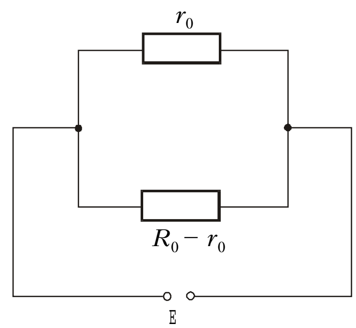
Отметим, что полученная нами оценка величины заряда очень близка к точному ответу

$$q = \frac{\mathcal{E}C}{5 + 12/1000},$$

который можно получить, аккуратно проведя все необходимые вычисления. Видно, что оценочный результат отличается от точного не более чем на 0,2%.

О.Шведов

Ф1754. *Резисторы сопротивлениями R, 2R, 3R, … …, 100R соединены последовательно. Концы этой цепи замыкают, после чего к точке их соединения подключают один из проводов, идущих от батарейки с ЭДС $\mathcal{E}$ и нулевым внутренним сопротивлением. Между какими резисторами сопротивлениями nR и $(n+1)R$ нужно подключить второй провод, идущий от батарейки, чтобы ток через батарейку был наименьшим?*



Если второй провод, идущий от батарейки, подключен между резисторами сопротивлениями nR и $(n+1)R$, то схему можно представить в виде, показанном на рисунке, где

$$R_0 = R + 2R + \ldots + 100R = \frac{100\cdot 101}{2}R,$$

$$r_0 = R + 2R + \ldots + nR = \frac{n(n+1)}{2}R.$$

Тогда сила тока, протекающего через батарейку, равна

$$I = \frac{\mathcal{E}}{r_0} + \frac{\mathcal{E}}{R_0 - r_0} = \frac{\mathcal{E}R_0}{r_0(R_0 - r_0)}.$$

Минимально возможное значение силы тока I можно искать разными способами. Наиболее формальный из них состоит в следующем. Рассмотрим знаменатель последней формулы как квадратный трехчлен

$$y(r_0) = -r_0^2 + r_0R_0.$$

Известно, что квадратный трехчлен вида $y(x) = ax^2 + bx + c$ достигает экстремума при $x = -b/(2a)$. В нашем случае $y(r_0)$ достигает максимума при $r_0 = R_0/2$. Отсюда получаем условие на величину n:

$$\frac{n(n+1)}{2}R = \frac{100\cdot 101}{2\cdot 2}R,$$

которое сводится к квадратному уравнению

$$n^2 + n - 5050 = 0.$$

Решая его, находим

$$n \approx 70{,}565.$$

Поскольку n может принимать только целые значения, в качестве ответа следует принять наиболее близкое целое число, т.е. $n = 71$.

Другой способ отыскания минимума выражения для силы тока состоит в алгебраическом преобразовании знаменателя и приведении его к следующему виду:

$$r_0(R_0 - r_0) = \left(\frac{R_0}{2} + \left(r_0 - \frac{R_0}{2}\right)\right)\left(\frac{R_0}{2} - \left(r_0 - \frac{R_0}{2}\right)\right) = $$

$$= \left(\frac{R_0}{2}\right)^2 - \left(r_0 - \frac{R_0}{2}\right)^2.$$