

имеет скорость v , а кольцо покоится. Определите минимальное значение кинетической энергии бусинки в процессе дальнейшего движения. Трения нет.

Поскольку в начальный момент времени кольцо покоится, начальная скорость бусинки направлена по касательной к кольцу. Направим ось X лабораторной системы отсчета K вдоль скорости бусинки v , а ось Y этой системы координат проведем через бусинку и центр кольца. Перейдем в систему отсчета K_1 , связанную с центром масс кольца и бусинки, и договоримся, что оси X_1, Y_1 сонаправлены с осями X, Y . Эта система отсчета движется относительно системы K со скоростью

$$u = \frac{mv}{m+M}.$$

В системе отсчета K_1 бусинка и центр кольца совершают равномерные движения по окружностям, центры которых совпадают с центром масс. При этом в начальный момент времени проекции скорости бусинки на оси X_1 и Y_1 равны, соответственно,

$$v_{x_1}(0) = v - u = v - \frac{mv}{m+M} = \frac{Mv}{m+M}$$

и

$$v_{y_1}(0) = 0,$$

а с течением времени изменяются следующим образом:

$$v_{x_1} = \frac{Mv}{m+M} \cos \omega t \text{ и } v_{y_1} = \frac{Mv}{m+M} \sin \omega t,$$

где ω – некоторая частота.

Возвращаясь в систему отсчета K , получим проекции скорости бусинки на оси X и Y :

$$v_x = \frac{Mv}{m+M} \cos \omega t + \frac{mv}{m+M} \text{ и } v_y = \frac{Mv}{m+M} \sin \omega t.$$

Кинетическая энергия бусинки равна

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{m}{2} (v_x^2 + v_y^2) = \\ &= \frac{m}{2} \left(\frac{M^2 v^2}{(m+M)^2} \cos^2 \omega t + \frac{2mMv^2}{(m+M)^2} \cos \omega t + \right. \\ &\quad \left. + \frac{m^2 v^2}{(m+M)^2} + \frac{M^2 v^2}{(m+M)^2} \sin^2 \omega t \right) = \\ &= \frac{mv^2}{2(m+M)^2} (M^2 + m^2 + 2mM \cos \omega t). \end{aligned}$$

Она становится минимальной в тот момент времени, когда косинус принимает значение -1 . Следовательно,

$$E_{k \min} = \frac{mv^2}{2} \left(\frac{M-m}{M+m} \right)^2.$$

Р.Компанеец

Ф1752. Газ с молярной массой $M = 60$ г/моль находится в герметичном сосуде с жесткими стенками и поддерживается при постоянной температуре $T = 0$ °С. Площадь поперечного сечения молекул, которые можно рассматривать как твердые шарики, равна $S = 10^{-19}$ м². Давление газа в начале эксперимента $p_0 = 100$ Па. При освещении газа ультрафиолетовым светом молекулы,

поглотившие квант света, переходят в возбужденное состояние. Среднее время жизни молекулы в возбужденном состоянии $\tau = 10^{-3}$ с. При столкновении двух возбужденных молекул в газе происходит химическая реакция, в результате которой образуется одна новая молекула. Известно, что за 1 секунду в каждом кубическом сантиметре газа возбуждается $N = 10^{12}$ молекул. Оцените, за какое время давление в сосуде уменьшится на $\epsilon = 1\%$ от первоначального.

При указанных в условии задачи температуре, молярной массе и давлении молекулы движутся со средними скоростями

$$v = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \approx 337 \text{ м/с},$$

значит, за время своей жизни τ возбужденная молекула пролетает расстояние

$$L = v\tau \approx 3,4 \cdot 10^{-1} \text{ м}.$$

Объем, в котором летящая молекула может за это время столкнуться с другими молекулами, равен $V \approx 4LS$. Концентрация невозбужденных молекул в сосуде перед началом освещения равна

$$n = \frac{p_0 N_A}{RT} \approx 2,7 \cdot 10^{22} \text{ м}^{-3},$$

где N_A – постоянная Авогадро, R – универсальная газовая постоянная. Концентрация же возбужденных молекул составляет

$$n_b = \tau N \cdot 10^6 \approx 10^{15} \text{ м}^{-3}.$$

Одна возбужденная молекула за свое время жизни τ могла бы столкнуться с другими возбужденными молекулами ν_1 раз, причем

$$\nu_1 = V n_b = 4v\tau S n_b.$$

Значит, всего за это время в одном кубическом метре между возбужденными молекулами происходит

$$\nu = \frac{1}{2} \nu_1 n_b = 2v\tau S n_b^2 \approx 0,68 \cdot 10^{11} \text{ м}^{-3}$$

столкновений. Коэффициент $1/2$ появляется здесь из-за того, что столкновения парные, т.е. в каждом участвуют две молекулы. При каждом таком столкновении одна молекула исчезает, поэтому скорость убывания концентрации равна

$$\beta = \frac{\nu}{\tau} = 2v S n_b^2 \approx 6,8 \cdot 10^{13} \text{ м}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Давление в сосуде уменьшится на $\epsilon = 1\% = 0,01$ тогда, когда на такую же величину уменьшится концентрация молекул n . Это произойдет через время

$$t = \frac{\epsilon n}{\beta} \approx 4 \cdot 10^6 \text{ с} \approx 46 \text{ сут}.$$

Следует отметить, что ответ носит оценочный характер, т.е. время вычислено по порядку величины. Это связано с тем, что в расчетах более правильно использовать не среднюю, а среднюю относительную скорость движения молекул. Однако, ввиду того что эти скорости отличаются друг от друга не очень сильно (примерно в 1,4 раза),