

Материалы вступительных экзаменов 2000 года

Московский физико-технический институт

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x^4}{y^2} + xy = 72, \\ \frac{y^4}{x^2} + xy = 9. \end{cases}$$

2. Решите уравнение

$$\frac{\sin^2 9x}{\sin^2 x} = 16 \operatorname{ctg} 2x \sin 10x + \frac{\cos^2 9x}{\cos^2 x}.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{1}{|\log_2(x/2)| - 3} \leq \frac{1}{|\log_8 x^3| - 2}.$$

4. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC вершины A , B и точка пересечения высот треугольника E лежат на окружности, которая пересекает отрезок BC в точке D . Найдите длину отрезка CD , если $\angle ABC = 2 \arcsin(1/5)$, а радиус окружности $R = 5$.

5. Найдите все значения a , при которых уравнение

$$\log_{2x}(1 - ax) = \frac{1}{2}$$

имеет единственное решение.

6. В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ сторона основания ABC равна 6, угол между боковыми гранями $\arccos(1/10)$. В треугольнике ABD проведена биссектриса BA_1 , а в треугольнике BDC проведены медиана BC_1 и высота CB_1 . Найдите

- 1) объем пирамиды $A_1B_1C_1D$;
- 2) площадь проекции треугольника $A_1B_1C_1$ на плоскость ABC .

Вариант 2

1. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{-x^2 + 7x - 6}}{|x^2 - 6x + 5| - |x^2 - 2x - 3|} \leq 0.$$

2. Решите уравнение

$$\frac{\sin 3x}{\cos 2x \cos 5x} + \frac{\sin 3x}{\cos 5x \cos 8x} = \sin 8x - \operatorname{tg} 2x.$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_2^2(x+y) + \log_{\frac{1}{2}}(x+y) \log_{\frac{1}{2}}(x-2y) = \\ = 2 \log_2^2(x-2y), \\ x^2 - xy - 2y^2 = 4. \end{cases}$$

4. Окружности C_1 и C_2 внешне касаются в точке A . Прямая l касается окружности C_1 в точке B , а окружности C_2 в точке D . Через точку A проведены две прямые: одна проходит через точку B и пересекает окружность C_2 в точке E , а другая касается C_1 и C_2 и пересекает l в точке F . Найдите радиусы окружностей C_1 и C_2 , если $AB = 4$, $EF = \sqrt{10}$.

5. Найдите все значения a , при которых уравнение

$$\sqrt{x-9} = 3 - ax - 7a$$

имеет единственное решение.

6. В правильной треугольной пирамиде $ABCD$ угол ADB равен $2 \arcsin(1/3)$, сторона основания ABC равна 2. Точки K , M , N — середины отрезков AB , DK , AC соответственно. Точка E лежит на отрезке CM и $3ME = CE$. Через точку E проходит плоскость P перпендикулярно отрезку CM . В каком отношении плоскость P делит ребра пирамиды? Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью P и расстояние от точки N до плоскости P .

ФИЗИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Монета скользит по наклонной плоскости с углом наклона к горизонту α и в точке C имеет скорость v_0 (рис.1). Через некоторое время монета оказалась в точке D наклонной плоскости, пройдя путь s и поднявшись по вертикали на высоту H . Коэф-

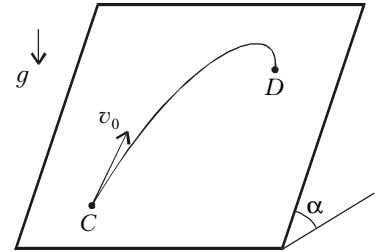


Рис. 1

фициент трения скольжения между монетой и наклонной плоскостью μ . Найдите скорость монеты в точке D .

2. В вертикально расположенной тонкой трубке длиной $3L = 840$ мм с открытым в атмосферу верхним концом столбик ртути длиной $L = 280$ мм запирает слой воздуха длиной L . Какой максимальной длины слой ртути можно долить сверху в трубку, чтобы она из трубки не выливалась? Внешнее давление $p_0 = 770$ мм рт.ст.

3. Сложный воздушный конденсатор состоит из четырех пластин, удерживаемых на равных расстояниях d друг от друга (рис.2). Пластины 1 и 3

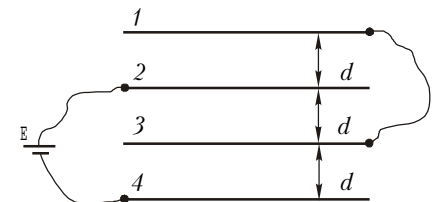


Рис. 2

закорочены. Пластины 2 и 4 подсоединены к источнику с ЭДС E . Определите силу, действующую со стороны электрического поля на пластину 3. Площадь каждой пластины S , а расстояние между ними много меньше размеров пластин.

4. Плоскопараллельная пластина составлена из двух стеклянных клинь-

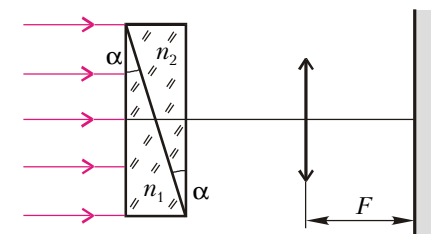


Рис. 3

ев с малым углом $\alpha = 5^\circ$ (рис.3). Показатели преломления клиньев $n_1 = 1,48$ и $n_2 = 1,68$. На пластину нормально ее поверхности падает параллельный пучок света. За пластиной расположена собирающая линза с фокусным расстоянием $F = 60$ см. На экране, расположенном в фокальной плоскости линзы, наблюдается светлая точка. На сколько сместится эта точка на экране, если убрать пластину? *Указание:* для малых углов x справедливо соотношение $\sin x \approx x$.

5. Для поддержания незатухающих колебаний в контуре с малым затуханием, изображенном на рисунке 4, индуктивность катушки быстро (по

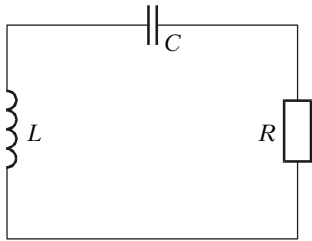


Рис. 4

сравнению с периодом колебаний в контуре) увеличивают на небольшую величину ΔL ($\Delta L \ll L$) каждый раз, когда ток в цепи равен нулю, а через время, равное четверти периода колебаний, так же быстро возвращают в исходное состояние. Определите величину ΔL , если $L = 0,15$ Гн, $C = 1,5 \cdot 10^{-7}$ Ф, $R = 20$ Ом.

Вариант 2

1. Два шара насажены на прямолинейную горизонтальную спицу и могут скользить по ней без трения (рис.5). К шару массой m прикреплена легкая

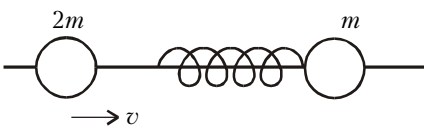


Рис. 5

пружина жесткостью k , и он покоится. Шар массой $2m$ движется со скоростью v . Радиусы шаров много меньше длины пружины. 1) Определите скорость шара массой $2m$ после отрыва от пружины. 2) Определите время контакта шара массой $2m$ с пружиной.

2. В цилиндрическом стакане с водой на нити висит проволока, замороженная в кусок льда. Лед с проволокой целиком погружен в воду и не касается стенок и дна стакана. После того как лед растаял, проволока осталась висеть на нити целиком погруженная в воду. Уровень воды в стака-

не за время таяния льда уменьшился на ΔH ($\Delta H > 0$), а сила натяжения нити увеличилась в k раз. Найдите объем проволоки. Плотность воды ρ_0 , плотность проволоки ρ , площадь внутреннего сечения стакана S .

3. Газообразный гелий находится в цилиндре под подвижным поршнем. Газ нагревают при постоянном давлении, переводя его из состояния 1 в состояние 2 (рис.6). При этом газ

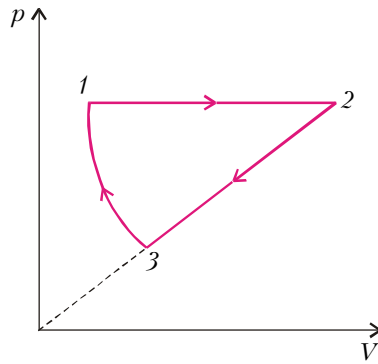


Рис. 6

совершает работу A_{12} . Затем газ сжимается в процессе 2-3, когда его давление p прямо пропорционально объему V . При этом над газом совершается работа A_{23} ($A_{23} > 0$). Наконец, газ сжимается в адиабатическом процессе 3-1, возвращаясь в первоначальное состояние. Найдите работу сжатия A_{31} , совершенную над газом в адиабатическом процессе.

4. В схеме, изображенной на рисунке 7, в начальный момент ключ K

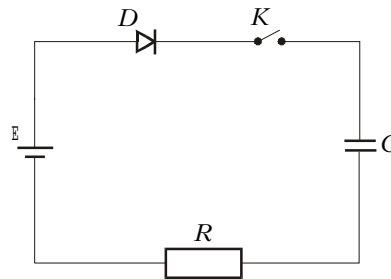


Рис. 7

разомкнут, а конденсатор емкостью $C = 100$ мкФ не заряжен. Вольт-амперная характеристика диода D

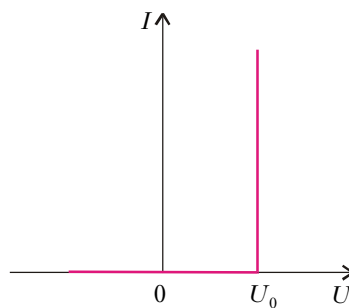


Рис. 8

изображена на рисунке 8. ЭДС батареи $\mathcal{E} = 6$ В, пороговое напряжение диода $U_0 = 1$ В, сопротивление резистора $R = 1$ кОм. 1) Чему равен ток в цепи сразу после замыкания ключа? 2) Какой заряд протечет через диод после замыкания ключа? 3) Какое количество теплоты выделится на резисторе после замыкания ключа? Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

5. Точечный источник света расположен на главной оптической оси слева от рассеивающей линзы с фокусным расстоянием $F_1 = -10$ см. Расстояние от источника до линзы $d = 40$ см. На расстоянии $L = 20$ см слева от рассеивающей линзы расположена собирающая линза. Главные оптические оси линз совпадают. Найдите фокусное расстояние собирающей линзы, если из системы линз выходит параллельный пучок света.

Публикацию подготовили
М.Балашов, В.Можаев, Ю.Чешев,
М.Шабунин

Московский государственный институт электроники и математики (технический университет)

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультеты электроники, информатики и телекоммуникаций, автоматики и вычислительной техники)

1. Дана функция $f(x) = \log_{27} x$. Требуется

- а) вычислить $f(9\sqrt{3})$;
- б) решить неравенство $f(4x + 3) < 1$;
- в) решить уравнение

$$f(-\sin x) + f(-10 \cos x) = \frac{1}{2}.$$

2. Дан треугольник ABC ($AB = 39$; $BC = 15$; $AC = 36$). Найдите

- а) высоту, проведенную из вершины C ;
- б) тангенс половины угла треугольника при вершине A ;
- в) расстояние между центрами вписанной в треугольник и описанной около него окружностей.

3. Решите уравнение

$$3 \cdot 4^{\sin^2 x} + 4 \cdot 2^{\cos 2x} = 14.$$

4. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны расстояния $AB = 4$, $AD_1 = \sqrt{10}$, $AA_1 = 4$. Вычислите площадь треугольника

A_1BD . Докажите, что плоскости треугольников A_1BD и B_1CD_1 параллельны, и найдите расстояние между ними.

5. Решите уравнение

$$2 \cos 2x - 4 \sin x + 1 = 0$$

и найдите все значения a , при которых это уравнение равносильно уравнению

$$\log_4(a \cos 2x - a \sin x + 1) - \log_2 \sin x = 1.$$

Вариант 2

(факультеты прикладной математики, экономико-математический)

1. Решите неравенство

$$\frac{2\sqrt{7-2x}}{x+1} \geq \frac{\sqrt{7-2x}}{x-2}.$$

2. Решите неравенство

$$\log_{125}(26x^2 + 11x - 1) < \log_5(2x + 1).$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 14 \sin^2 x - 9 \sin 2x - 4 = 0, \\ 11 \cos^2 y - 5 \sin 2y - 3 = 0, \\ \sin(x - y) = -\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

4. В основании пирамиды $SABC$ с вершиной S лежит равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC = 24$, $AC = 12$); высота пирамиды равна $\sqrt{60}$; боковые грани пирамиды составляют с основанием равные углы. На стороне AC взята точка M так, что $AM = 9$; на стороне BC взята точка N так, что $BN = 18$. Найдите объем пирамиды и определите, в каком отношении делит объем пирамиды плоскость, которая перпендикулярна основанию и проходит через точки M и N .

5. В точке P , лежащей на параболе $y = x^2$, проведена касательная к этой кривой. Перпендикуляр к касательной в точке P пересекает кривую во второй точке Q . Найдите наименьшую длину отрезка PQ .

ФИЗИКА

Задачи устного экзамена

1. Три бруска, связанные нитями, движутся горизонтально по шероховатой поверхности под действием приложенной к первому бруску силы, равной F и направленной под углом α к горизонту. Найдите отношение сил натяжения нитей. Массы брусков одинаковы и равны m .

2. Тело, брошенное вертикально вверх со скоростью v_0 , упало на землю

с такой же скоростью. С какой скоростью упадет брошенная вверх с той же скоростью подушка, если ее максимальная высота подъема равна $3/4$ от максимальной высоты подъема тела? Силу сопротивления считать постоянной, вращением подушки пренебречь.

3. Небольшой воздушный шарик удерживается в воде на некоторой глубине при температуре $t_1 = 17^\circ\text{C}$. Шарик отпускают, и он начинает всплывать. На поверхности воды, при температуре воздуха $t_2 = 27^\circ\text{C}$, объем шарика увеличивается на 20%. На какой начальной глубине находился шарик? Атмосферное давление $p_a = 10^5$ Па, плотность воды $\rho_v = 10^3$ кг/м³.

4. Один моль идеального газа совершает замкнутый цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар. Температуры в точках 2 и 4 равны T_2 и T_4 соответственно. Определите работу, совершаемую газом за цикл, если на диаграмме $p - V$ эти точки лежат на одной прямой, проходящей через начало координат.

5. В закрытом сосуде объемом $V = 10$ л содержится смесь воды и ее паров при температуре $t = 100^\circ\text{C}$ общей массой $m = 20$ г. Найдите, сколько воды находится в сосуде.

6. Три одинаковых заряда находятся в вершинах равнобедренного прямоугольного треугольника. Найдите работу, которую необходимо совершить, чтобы удалить заряд из вершины прямого угла, если напряженность поля в этой точке равна E , а катет треугольника равен a .

7. Конденсатор емкостью $C_1 = 600$ нФ зарядили до разности потенциалов $U = 1,5$ кВ и отключили от источника питания. Затем к конденсатору присоединили незаряженный конденсатор, имеющий емкость $C_2 = 400$ нФ. Определите энергию, израсходованную на образование искры, проскочившей при соединении конденсаторов.

8. Вентилятор включен в сеть с напряжением $U = 220$ В, по его обмотке течет ток $I = 5,0$ А. Если удерживать лопасти вентилятора, не давая им вращаться, то вентилятор начинает греться. При этом выделяется тепловая мощность $P = 2200$ Вт. Найдите КПД вентилятора.

9. При изменении тока со скоростью $\Delta I/\Delta t = 0,5$ А/с в катушке индуцируется ЭДС $\mathcal{E} = 2,0$ мВ. Найдите емкость конденсатора в контуре, содержащем эту катушку, если контур настроен на длину волны $\lambda = 300,0$ м.

10. Два точечных источника света расположены на главной оптической оси собирающей линзы на расстоянии $a = 20,0$ см друг от друга. Линза находится между источниками на расстоянии $d = 6,0$ см от одного из них. Изображения обоих источников оказались в одной точке. Найдите фокусное расстояние линзы.

Публикацию подготовили
Г.Померанцева, В.Тонян

Московский педагогический
государственный университет

МАТЕМАТИКА

Письменный экзамен

Вариант 1

(математический факультет)

1. Два туриста одновременно вышли из городов A и B навстречу друг другу. После встречи на трассе первый турист затратил 6 часов на оставшийся путь до города B , а второй турист затратил 2 часа 40 минут на оставшийся путь до города A . Найдите время в пути второго туриста.

2. Решите уравнение

$$\frac{1 - 0,5 \sin 2x}{\sin^3 x + \cos^3 x} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2 \cos^2 x}}.$$

3. Решите неравенство

$$\log_x \left(\frac{1}{\log_4 \left(3 \cdot 2^{\frac{1}{x}} + 4 \right)} \right) \leq 1.$$

4. Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - |6 + x - x^2|$ на промежутке $[-4; 4]$.

5. Правильная треугольная пирамида со стороной основания 4 и высотой 2 пересечена плоскостью, параллельной боковой грани и проходящей через середину высоты пирамиды. Найдите площадь сечения.

Вариант 2

(математический факультет)

1. Два поезда одновременно выехали из пунктов A и B навстречу друг другу. Первый поезд прибыл в пункт B через 4 часа после встречи поездов на трассе, второй поезд прибыл в пункт A через 9 часов после встречи. Найдите время в пути первого поезда.

2. Решите уравнение

$$\frac{1 + \sin x}{1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}} + 2 \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}} = 3.$$

3. Решите неравенство

$$\log_{0,5} \left(\frac{1}{1 + \log_{\frac{1}{3}} x - \log_3 x} \right) \leq 1.$$

4. Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - |3,75 + x - x^2|$ на промежутке $[-3; 3]$.

5. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ точка M – середина ребра $A_1 B_1$, точка P – середина ребра BC . Найдите угол между плоскостями AMP и ABC .

Вариант 3

(физический факультет)

1. Развертка боковой поверхности цилиндра является прямоугольником, диагональ которого равна d и составляет с основанием этого прямоугольника угол α . Найдите объем цилиндра.

2. Решите уравнение

$$\operatorname{tg} 2x - \operatorname{ctg} 3x = 0.$$

3. Решите уравнение

$$\log_2(x-1) + \log_2 x = 1.$$

4. Решите неравенство

$$(x-1)\sqrt{x^2 - x - 2} \geq 0.$$

5. Исследуйте на максимум и минимум функцию

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4.$$

Вариант 4

(химический факультет)

1. Найдите площадь трапеции с основаниями 16 и 44 и боковыми сторонами 17 и 25.

2. Решите уравнение

$$\sin^2 x + \cos^2 2x = 1.$$

3. Решите неравенство

$$\sqrt{x^2 - 4x + 3} \geq \sqrt{3}.$$

4. Решите уравнение

$$2^{2x-3} - 3 \cdot 2^{x-2} + 1 = 0.$$

5. Найдите точки экстремума функции

$$y = \frac{x^2}{x+1}.$$

Задачи устного экзамена
(математический факультет)

1. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^{-x} > \frac{27}{64}, \\ \sqrt{x^2} \leq 25. \end{cases}$$

2. Решите уравнение

$$3^{2-2|x+1|} + 8 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{|x+1|-1} = 9.$$

3. Решите неравенство

$$x + 3 \leq \sqrt{(1-x)^2} + \sqrt{(x-2)^2}.$$

4. При каких значениях q минимум функции

$$y = qx^2 + 2qx - 2q^2 - 1$$

равен (-2) ?

5. Найдите все значения q , при которых неравенство

$$2(q-1)x + 3q - x^2 < 13$$

выполняется при всех $x \leq -1$.

6. Вычислите

$$\log_{\sqrt{x}} \left(y \cdot x^{\frac{1}{3}} \right) + \log_{\frac{1}{y^3}} \frac{x}{y},$$

если

$$\log_{y^2 x^{-1}} (y x^2) = \frac{11}{7}.$$

7. Вычислите $x_1^4 x_2 + x_1 x_2^4$, где x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2 + 1,5x - 2 = 0$.

8. Вычислите

$$\frac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{2 \sin 2\alpha - \sin 3\alpha - \sin \alpha},$$

если $\cos \alpha = \frac{1}{5}$.

9. Решите уравнение

$$\frac{1,5}{\sin x \sin 3x + 2 \cos 2x} = 1.$$

10. Сколько критических точек функции

$$y = \sin \left(\frac{\pi}{6} - 2x \right)$$

расположено на интервале $(-2\pi; \pi)$?

11. Постройте график функции

$$y = \sqrt{x^2 + 2\sqrt{5}x + 5} + \sqrt{x^2 - 2\sqrt{5}x + 5}.$$

12. Постройте график функции

$$y = 0,5 \left| \log_3 x^2 \right| - 3.$$

13. Постройте график функции

$$y = \sin x |\operatorname{ctg} x| + 1.$$

14. В сектор круга с центральным углом $\alpha = 60^\circ$ вписан круг площади $S = 9$. Найдите площадь сектора.

15. Объем конуса $V = 1024\sqrt{\pi}$, площадь его осевого сечения $S = 192$. Найдите длину образующей конуса.

ФИЗИКА

Задачи устного экзамена

1. Какой груз нужно положить на плоскую льдину, чтобы она полностью погрузилась в воду? Площадь

льдины 5 м^2 , ее толщина 20 см ; плотность льда $0,9 \text{ г/см}^3$.

2. Пуля массой 10 г , выпущенная под углом α к горизонту, в верхней точке имеет кинетическую энергию 400 Дж . Определите угол α , если начальная скорость пули 500 м/с .

3. Лифт из состояния покоя поднимается равноускоренно и через 3 с оказывается на высоте 15 м . Найдите вес груза массой 40 кг во время подъема в лифте. Какая работа совершается при подъеме груза на эту высоту?

4. Нить, к которой прикреплен груз массой $0,3 \text{ кг}$, отклоняют от вертикали на угол 90° и отпускают. Найдите силу натяжения нити при прохождении грузом положения равновесия.

5. Газ находится под поршнем цилиндра при температуре 27°C и давлении $2 \cdot 10^5 \text{ Па}$. Какую работу совершат $2,5 \text{ л}$ газа при изобарном расширении, если начальную температуру повысить до 127°C ?

6. В электрическом чайнике мощностью 400 Вт можно вскипятить 1 л воды при начальной температуре 20°C за 15 мин . Найдите КПД чайника. Удельная теплоемкость воды $4,2 \cdot 10^3 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{K)}$.

7. Два одинаковых металлических шарика заряжены разноименными зарядами так, что абсолютная величина заряда одного из них в 5 раз больше другого. Шарики приводят в соприкосновение и затем раздвигают на прежнее расстояние. Во сколько раз при этом изменится сила взаимодействия шариков?

8. Конденсатор емкостью C зарядили до напряжения 500 В . При параллельном подключении этого конденсатора к незаряженному конденсатору емкостью 4 мкФ вольтметр показал напряжение 100 В . Найдите емкость C .

9. К источнику тока с внутренним сопротивлением 2 Ом подключен проводник сопротивлением 4 Ом . Во сколько раз изменится мощность, выделяемая во внешней цепи, если последовательно с проводником подключить еще один такой же проводник?

10. Какова максимальная скорость электронов, вырванных с поверхности платины при облучении светом с длиной волны 100 нм ? Постоянная Планка $6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$, работа выхода $0,5 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$.

Публикацию подготовили
Г.Брайчев, Б.Кукушкин,
Е.Пантелеева, М.Чистова,
Г.Шадрин