Решения задач М1726—М1735, Ф1743—Ф1747

М1726. *На плоскости проведено n прямых. Каждая пересекается ровно с 1999 другими. Найдите все возможные значения n.*

Ответ: 2000 или 3998.

Если среди n прямых нет параллельных, то $n = 2000$, так как каждая прямая пересекается со всеми остальными.

Если же у какой-то из n прямых есть ровно K ей параллельных, то у любой прямой другого направления тоже есть ровно K ей параллельных (иначе эти две прямые пересекались бы с неодинаковым числом других). Значит, $n = (K+1)S$, где S – число различных направлений, которым параллельны прямые. Но тогда $1999 = (K+1)(S-1)$. Так как 1999 число простое, то $K + 1 = 1999$, $S = 2$, т.е. $n = 3998$.

Р.Женодаров

М1727. *Неутомимые Фома и Ерема строят последовательность. Сначала в последовательности есть одно натуральное число. Затем они по очереди выписывают следующие числа: Фома получает очередное число, прибавляя к предыдущему любую из его цифр, а Ерема – вычитая из предыдущего любую из его цифр. Докажите, что какое-то число в этой последовательности повторится не меньше 10 раз.*

Пусть первое число последовательности строго меньше $\underbrace{99\ldots9}_{n}0$. Покажем, что все члены последовательности не превосходят $\underbrace{99\ldots9}_{n+1}$. Каждый раз к числу прибавляется не более 9, поэтому для того, чтобы перейти через $\underbrace{99\ldots9}_{n+1}$, сначала Фома должен получить число $\underbrace{99\ldots9}_{n}?$, где ? – одна из цифр. Ерема может из этого числа вычесть 9, тогда (при $? < 9$) снова получается число, меньшее $\underbrace{99\ldots9}_{n}0$. Если же Ерема вычитает ?, то получается $\underbrace{99\ldots9}_{n}0$. Фома может прибавить 0, не изменив числа, или прибавить 9, получив $\underbrace{99\ldots9}_{n+1}$. В любом случае через $\underbrace{99\ldots9}_{n+1}$ он не перейдет.

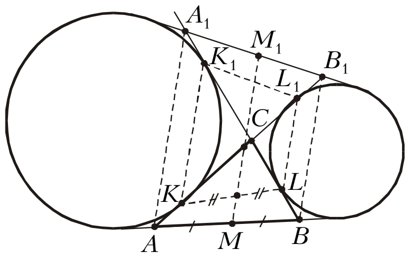
Таким образом, после того как выписано достаточно много членов последовательности (скажем, $1\underbrace{00\ldots0}_{n+1}\cdot 99+1$), согласно принципу Дирихле хотя бы одно число повторится даже не 10, а по крайней мере 100 раз, так как все члены последовательности – целые числа из отрезка $[0;\underbrace{99\ldots9}_{n+1}]$.

А.Шаповалов

М1728. *Точки K, L на сторонах AC, CB треугольника ABC – это точки, в которых вневписанные окружности касаются сторон. Докажите, что прямая, соединяющая середины KL и AB,*

а) делит периметр треугольника ABC пополам;
б) параллельна биссектрисе угла ACB.

Достроим чертеж задачи до симметричного чертежа, и соображения симметрии помогут нам ее решить (см. рисунок).



Равнобочные трапеции AA_1B_1B и KK_1L_1L обладают тем свойством, что основание AA_1 параллельно основанию KK_1 и отстоит от него на то же расстояние, что и BB_1 от LL_1. Это следует из того известного факта (который легко перепроверить), что отрезки касательных AK и BL равны.

Теперь можно сказать, что средняя линия MM_1 трапеции AA_1B_1B является также средней линией трапеции KK_1L_1L. Чтобы завершить доказательство, осталось сделать два замечания. Первое: MM_1 делит диагональ AB_1 трапеции AA_1B_1B пополам, а половина этой диагонали равна полусумме сторон AC и BC треугольника ABC. Второе: MM_1 параллельна биссектрисе угла ACB.

Л.Емельянов

М1729. *Натуральный ряд чисел разбит на две бесконечные части так, что любая тройка чисел из какой-либо части дает в сумме число, принадлежащее той же части. Докажите, что нечетные числа принадлежат одной части, а четные – другой.*

Для удобства изложения будем считать числа одной части красными, а другой – синими.

Докажем, что любая пара чисел вида $(n, n + 2)$ одноцветна. Допустим противное: нашлось такое красное число n, что число $n + 2$ синее. Тогда возьмем синее число m ($m > n + 2$) такое, что число $m + 1$ красное, а также синее число k ($k > m$) такое, что число $k + 1$ красное. В этом случае тройка красных чисел $(n, m + 1, k + 1)$ в сумме дает красное число $n + m + k + 2$. Но тройка синих чисел $(n + 2, m, k)$ в сумме дает синее число $n + m + k + 2$; получено противоречие.

Теперь можно заключить, что все нечетные числа одноцветны, а также, что все четные числа одноцветны. Но все натуральные числа не являются одноцветными. Значит, нечетные числа имеют один цвет (например, красный), а четные – другой (например, синий).

Напоследок можно отметить, что в условии задачи слова «любая тройка чисел» правомерно заменить на слова «любые $2k + 1$ чисел» – утверждение при этом останется в силе.

В.Произволов

М1730*. *Продолжения противоположных сторон произвольного выпуклого четырехугольника ABCD пересекаются в точках M и K (рис.1). Через точку O пересечения его диагоналей проводится прямая, параллельная MK. Докажите, что отрезок этой прямой, заключенный внутри четырехугольника, делится точкой O пополам.*

Проведем через точку D прямую l (сделайте чертеж самостоятельно), параллельную KM; пусть E и F – точки пересечения l с прямыми BC и BA соответственно. Пусть для определенности прямая, проходящая через O параллельно KM и l, пересекает стороны AB и CD четырехугольника. В этом случае для решения задачи надо доказать, что точка O лежит на медиане KL треугольника DKF. Мы докажем, что O – точка пересечения медиан KL и MN треугольников DKF и DME соответственно.

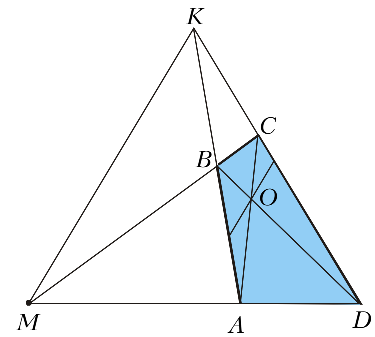


Рис.1

Обозначим точку пересечения медиан KL и MN через X. Докажем вначале, что X лежит на BD, т.е. что прямые DX и BD совпадают. Для этого докажем, что они делят отрезок KM в одном и том же отношении.

Пусть Y – точка пересечения DX и KM. Имеем: $KY/LD = XY/DX$ (поскольку треугольники XYK и XDL подобны), $MY/DN = XY/DX$. Поэтому $KY/MY = LD/DN$. Аналогично доказывается, что BD делит KM в отношении FD/DE. Но $FD = 2LD$, $DE = 2DN$.

Осталось доказать, что X лежит на отрезке AC. Другими словами, что KL и MN делят отрезок AC в одном и том же отношении.

Лемма 1. $VS/BV = AS/AC$, где S – точка на стороне AC треугольника ABC, V – точка пересечения прямой BS с медианой AN этого треугольника.

Доказательство. Рассмотрим точку T отрезка BC такую, что $ST \parallel AN$. Из теоремы Фалеса следует, что $VS/BV = NT/BN = NT/NC = AS/AC$.

Лемма 2. $VS/UV = (AS/AU)(AB/AC)$, где U и S – точки на сторонах AB и AC треугольника ABC соответственно, а V – точка пересечения прямой US с медианой AN этого треугольника.

Доказательство. На стороне AC возьмем точку Z такую, что $UZ \parallel BC$. По лемме 1 имеем $VS/UV = AS/AZ$, а по теореме Фалеса $AC/AB = AZ/AU$. Осталось перемножить эти равенства.

Доказанные утверждения позволяют завершить решение задачи. Именно, по лемме 2 медиана KL делит отрезок AC (считая от C) в отношении $m = (CK/KD)(KF/AK)$, а медиана MN – в отношении $n = (MC/ME)(MD/MA)$. Но $MC/ME = KC/KD$, $KF/AK = MD/MA$. Следовательно, $m = n$.

Утверждение задачи доказано.

Замечание. Вот еще одно, более естественное, хотя и несколько более сложное, доказательство леммы 2. Проведем через V параллельные AS и AU прямые (рис.2). Имеем: $x/y = AC/AB$ (это – характеристическое свойство точек медианы!). Теорема Фалеса дает: $VS/y = US/AU$, $x/UV = AS/US$. Перемножая эти два равенства, получаем $VS/UV = (AS/AU)(y/x) = (AS/AU)(AB/AC)$. Лемма доказана.

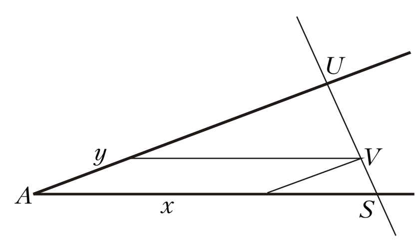


Рис.2

М.Волчкевич, В.Сендеров

М1731. *Нарисовано 60 звездочек, и двое поочередно заменяют любую звездочку на цифру. Докажите, что второй может сделать так, чтобы полученное число делилось на 13.*

Разобьем полученное число на 10 шестерок цифр. Второй может легко сделать так, чтобы в каждой шестерке первые три цифры совпадали с последними ($abcabc$). Полученное число будет делиться на 1001 и, следовательно, на 13.

Н.Васильев, Б.Гинзбург

М1732. *а) Множества A и B на прямой содержат по n точек. Если все троеточия из множества A занумеровать в каком-либо порядке, то все троеточия из множества B можно занумеровать в таком порядке, что всякие два троеточия из A и B, имеющие одинаковые номера, будут равны (при наложении совпадут). Докажите, что множества A и B равны.*
б) Сохранит ли утверждение силу, если в нем «троеточия» заменить на «двоеточия»?*

а) Нужно доказать, что множества A и B равны или, как еще говорят, изометричны. Сначала отметим, что список расстояний между всевозможными парами точек из множества A, в котором $\frac{n(n+1)}{2}$ чисел, совпадает с подобным списком для множества B – это непосредственно вытекает из условия задачи. Отсюда можно заключить, что диаметры множеств A и B равны. Поэтому множества A и B можно разместить на одном отрезке I, концы которого принадлежат как A, так и B.

Теперь нужно доказать, что множества A и B либо совпали, либо симметричны относительно точки Q, которая является серединой отрезка I.

Рассмотрим возможное взаиморасположение точек множества A и множества B на отрезке I с концами α и β. Если точка $\gamma \in A$, то либо $\gamma \in B$, либо точка, симметричная точке γ относительно Q, принадлежит B, так как по условию для троеточия $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ из множества A в множестве B имеется равное троеточие. Если две точки γ и δ, симметричные относительно Q, принадлежат множеству A, то обе они принадлежат и множеству B.

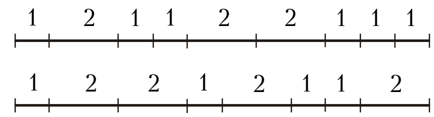
Обозначим $C = A \cup B$, в множестве C выделим максимальное подмножество C_1, симметричное относительно точки Q. Тогда $C = C_0 \cup C_1$. Заметим, что множество $A_1 = A - C$ и $B_1 = B - C$ не пересекаются и симметричны относительно точки Q. Если множество A_1 (а значит и B_1) пустое, то A совпадает с B. Если множество C_0 пустое, то A симметрично B относительно Q. Ввиду этого достаточно убедиться, что хотя бы одно из двух множеств C_0 и A_1 обязательно является пустым.

Допустим противное: ни C_0, ни A_1 пустыми не являются. Из определений этих множеств и проведенного анализа следует, что полный список (с учетом кратностей) расстояний между парами точек, одна из которых принадлежит C_0, а другая A_1, совпадает с полным списком расстояний между парами точек, одна из которых принадлежит C_0, а другая B_1 (обдумайте детально это умозаключение!).

Но максимальное расстояние между точками множества C_0 и точками множества A_1 не равно максимальному расстоянию между точками C_0 и точками B_1! Чтобы в этом удостовериться, каждое из названных множеств удобно и достаточно представить двумя точками: крайней левой и крайней правой. При этом нужно вспомнить, что A_1 и B_1 симметричны относительно точки Q, а C_0 – строго асимметрично относительно Q.

Значит, противоречие получено, и утверждение доказано.

б) Не сохранит. Приведем пример двух множеств A и B, каждое из которых состоит из 9 точек. При этом полный список расстояний между точками A (из 36 чисел) совпадает с аналогичным списком множества B, но эти множества не равны (не изометричны). Множество A задается словом $abaabbab$, множество B – словом $abbabaab$ (буква в слове – расстояние между соседними точками множества). При $a = 1$ и $b = 2$ множества A и B представлены на рисунке.



Остается открытым вопрос: изменится ли ответ этого пункта, если все расстояния в множестве A считать различными?

В.Произволов

М1733. *Непрерывная функция $f(x)$ такова, что $f = f^{-1}$ и $f(0) = 1$. Докажите равенство*

$$\int_0^1 |x - f(x)|\,dx = \frac{1}{2}.$$

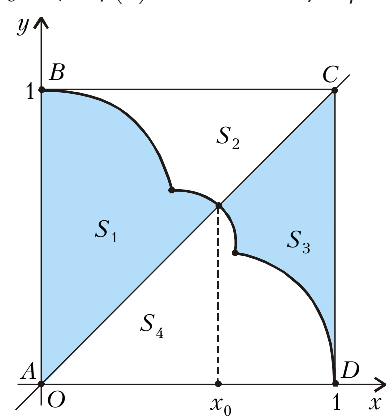


График функции $y = f(x)$ симметричен относительно биссектрисы первого координатного угла $y = x$ (см. рисунок). Значит, $S_1 = S_4$, а $S_2 = S_3$. Поэтому можно записать

$$\int_0^1 |x - f(x)|\,dx = \int_0^{x_0} (f(x) - x)\,dx + \int_{x_0}^1 (x - f(x))\,dx =$$

$$= S_1 + S_3 = \frac{1}{2} S_{ABCD} = \frac{1}{2}.$$

К.Каибханов

М1734. *Докажите, что уравнение $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\beta} = \cos x$ на $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ не имеет решений при $\beta \le 3$, но имеет единственное решение при $\beta > 3$.*

Такие задачи обычно сводятся к исследованию функции с помощью производных. Трудность состоит в том, чтобы суметь удачно выбрать исследуемую функцию.

Исследование уравнения задачи мы начнем с очевидного замечания: при $\beta \le 0$ оно решений не имеет. В самом деле, поскольку $\sin x < x$ при $x > 0$, то при $\beta \le 0$ на всем интервале $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ выполнено неравенство $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\beta} \ge 1$.

Пусть $\beta > 0$. Заметим, что функция $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\beta} - \cos x$ обращается в ноль в тех же точках интервала $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$, что и функция

$$f(x) = \sin x \cos^{\gamma} x - x,$$

где $\gamma = -\dfrac{1}{\beta} < 0$.

Изучим поведение $f(x)$ на полуинтервале $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Имеем: $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$, $f(x) \to +\infty$ при $x \to \dfrac{\pi}{2}$. Далее, $f''(x) = -\sin x \cdot \varphi(x)$, где

$$\varphi(x) = (1+\gamma)^2 \cos^{\gamma} x - \gamma(\gamma-1)\cos^{\gamma-2} x.$$

Заметим, что $\varphi(x)$ имеет на $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ не более одного корня.

Найдем знак функции $\varphi(x)$ в окрестности нуля. Функция $\varphi(x)$ положительна в некоторой окрестности точки 0, если

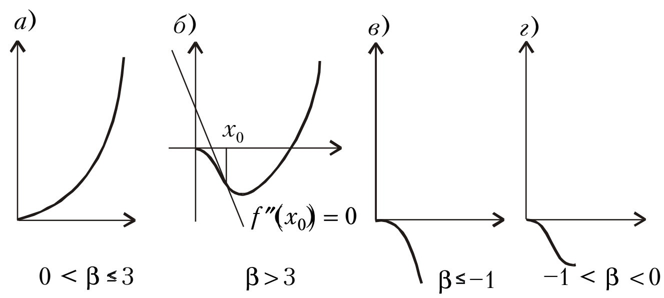
$$\gamma(\gamma-1) < (1+\gamma)^2,$$

$$2\gamma + 1 > -\gamma,$$

$$1 > -3\gamma, \ \beta > 3.$$

Легко видеть, что при $0 < \beta \le 3$ на всем интервале $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ выполняется неравенство $\varphi(x) < 0$.

Теперь мы знаем ход изменения функции $f(x)$ на рассматриваемом интервале (рис. *а* и *б*). Тем самым утверждение задачи доказано.



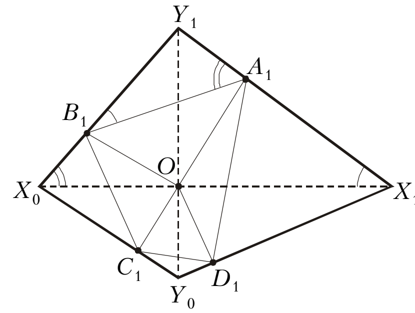
Замечание 1. На рисунках *в* и *г* изображены графики функции $f(x)$ при $\beta < 0$; полезно проследить за изменением вида этого графика при изменении числа β от 0 до $+\infty$, а затем от 0 до $-\infty$.

Замечание 2. На Всесоюзной студенческой олимпиаде 1977 года предлагалась такая задача: «Доказать неравенство $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^3 \ge \cos x$ при $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$».

В.Сендеров

М1735*. *Выпуклый многогранник имеет шесть вершин – по одной на каждой из полуосей прямоугольной системы координат. Докажите, что восемь проекций начала координат на грани многогранника принадлежат одной сфере.*

Пусть три вершины многогранника X_0, Y_0 и Z_0 лежат на отрицательных полуосях, а три другие вершины X_1, Y_1 и Z_1 – на положительных полуосях, точка O – начало координат. Четыре проекции точки O лежат на гранях многогранника $Z_1X_1Y_1$, $Z_1Y_1X_0$, $Z_1X_0Y_0$ и $Z_1Y_0X_1$ – это точки A, B, C и D соответственно. Так как $\angle Z_1AO = \angle Z_1BO = \angle Z_1CO = \angle Z_1DO = 90°$, то сфера S, построенная на Z_1O как на диаметре, содержит точки A, B, C и D.



Докажем, что точки A, B, C и D принадлежат одной окружности, т.е. сечению сферы S. Спроектировав эти точки из точки Z_1 на ребра многогранника X_1Y_1, Y_1X_0, X_0Y_0 и Y_0X_1, получим точки A_1, B_1, C_1 и D_1 соответственно. Эта проекция – стереографическая, и как только мы докажем, что A_1, B_1, C_1 и D_1 принадлежат одной окружности, так сразу убедимся, что точки A, B, C и D тоже принадлежат одной окружности.

Заметим, что точки A_1, B_1, C_1 и D_1 – это проекции точки O на стороны четырехугольника $X_1Y_1X_0Y_0$, диагонали которого X_1X_0 и Y_1Y_0 перпендикулярны и пересекаются в точке O (см. рисунок). В треугольнике $X_0Y_1X_1$ отрезок B_1A_1 антипараллелен стороне X_0X_1, т.е. $\angle Y_1B_1A_1 = \angle Y_1X_1X$, а $\angle Y_1A_1B_1 = \angle Y_1X_0X_1$; аналогичные равенства углов получим в треугольниках $Y_1X_0Y_0$, $X_0Y_0X_1$ и $Y_0X_1Y_1$. После этого простой подсчет покажет, что суммы противоположных углов в четырехугольнике $A_1B_1C_1D_1$ равны по 180°, т.е. около $A_1B_1C_1D_1$ можно описать окружность. Значит, точки A, B, C и D принадлежат одной окружности, а четырехугольник $ABCD$ является одной из шести граней многогранника M, восемь вершин которого – это восемь проекций точки O на грани исходного многогранника. Все грани многогранника M (кубоида) являются четырехугольниками, около каждого из которых можно описать окружность. Рассмотрим сферу Q, содержащую две окружности, описанные около двух смежных граней многогранника M. Нетрудно убедиться, что сфера Q содержит все вершины многогранника M (имеет место частный случай задачи М456).

В.Произволов

Ф1743. *На листе бумаги с уменьшением в 10 раз нарисовали траекторию камня, брошенного под углом 45° к поверхности земли со скоростью 20 м/с. По нарисованной кривой ползет с неизменной по величине скоростью 0,02 м/с маленький жучок. Чему равно ускорение жучка в точке, соответствующей вершине траектории камня?*

В верхней точке траектории камня ускорение направлено перпендикулярно скорости камня и равно (как и в остальных точках траектории) ускорению свободного падения g. Тогда

$$g = \frac{\left(v_0 \cos 45°\right)^2}{R}, \text{ откуда } R = \frac{\left(v_0 \cos 45°\right)^2}{g}.$$

При уменьшении рисунка в 10 раз радиус кривизны траектории в любой ее точке становится в 10 раз меньше, ускорение жучка всюду перпендикулярно его скорости $\vec{u}$ (эта скорость не меняется по модулю), поэтому в интересующей нас точке траектории ускорение жучка равно

$$a = \frac{u^2}{r} = \frac{10u^2}{R} = \frac{10u^2 g}{\left(v_0 \cos 45°\right)^2} = 2 \cdot 10^{-4} \ \text{м/с}^2.$$

З.Рафаилов

Ф1744. *В глубинах космоса летает очень большой сосуд, в котором хаотически движутся маленькие стальные шарики, половина которых имеет диаметр d, а половина – диаметр 2d. Шарики упруго сталкиваются между собой и со стенками сосуда, потерь энергии при этом нет. Какие удары происходят чаще – маленьких шариков о маленькие или больших шариков о большие? Во сколько раз?*

Содержимое сосуда очень напоминает «обычный» идеальный газ – для такого газа можно считать, что средние кинетические энергии тяжелых и легких «молекул» одинаковы. При этом скорости их движения различаются – шарики диаметром $2d$ имеют массу в 8 раз большую, поэтому их средние квадратичные скорости в $\sqrt{8} \approx 2{,}8$ раза меньше. Площадь поперечного сечения у такого шарика в 4 раза больше, чем у маленького. Теперь можно оценить частоту ударов.

Пусть шарик летит со скоростью v в течение интервала времени Δt. Объем, в котором находятся «стукнутые» им шарики, пропорционален площади его поперечного сечения S, скорости движения и длительности интервала времени. (Изменения направления движения при ударах для нас несущественны – шарики располагаются в сосуде хаотически, и нам безразлично, где происходят удары. Правда, это справедливо, только если длина свободного пробега существенно больше размера шариков – иначе объем «заметаемого» пространства около точки удара было бы трудно посчитать.) При малой концентрации шариков числа ударов одинаковых шариков друг о друга пропорциональны «заметаемым» объемам, т.е. $Sv\Delta t$. Для больших шариков такой объем получается в $\sqrt{2}$ раз больше, чем для маленьких: $S_б = 4S_м$, $v_б = v_м/\sqrt{8}$, поэтому большие шарики сталкиваются между собой чаще в $\sqrt{2}$ раз.

А.Зильберман

Ф1745. *В очень большом сосуде находится гелий при температуре $T_0 = 1000$ К и давлении $p_0 = 0{,}1$ Па. Откачанный до глубокого вакуума сосуд объемом $V = 1$ л находится внутри большого сосуда. В стенке маленького сосуда открывается клапан площадью $S = 1$ мм^2, а через время $\tau = 0{,}01$ с он закрывается. Оцените давление и температуру внутри маленького сосуда после того, как в нем все успокоится. Стенки маленького сосуда очень тонкие, но их теплопроводность совсем мала.*

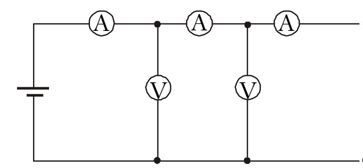
Для начала оценим длину свободного пробега молекул в большом сосуде. Концентрация молекул $n = p/(kT) \approx 10^{19}\ 1/\text{м}^3$ (оценки будем делать грубые – точные расчеты в этой задаче получаются плохо...). Принимая диаметр молекулы гелия равным $d = 2 \cdot 10^{-10}$ м, для длины свободного пробега получим $\lambda = 1/(\pi d^2 n) \approx 1$ м. При такой большой величине длины свободного пробега молекулы влетают в сосуд практически не соударяясь между собой, и работа окружающего газа над влетающими порциями отсутствует. Казалось бы, энергия молекул внутри сосуда должна быть равна среднему значению снаружи, однако доля быстрых молекул среди влетающих в сосуд заметно выше, чем снаружи, – быстрые молекулы за заданное время влетают в сосуд с бóльших расстояний, чем медленные. Расчет тут провести не просто – нужно учитывать долю молекул с определенными скоростями (распределение молекул по скоростям).

Можно сделать такую, например, грубую оценку: будем считать, что влетают в сосуд молекулы со средними энергиями, но быстрые молекулы их «подгоняют». Оценим давление только быстрых молекул как половину полного давления (строго говоря, их вклад выше, но доля быстрых молекул в общем числе невелика). Тогда «добавка» к средней энергии вошедшего в сосуд объема V молекул составит $0{,}5pV = 0{,}5\nu RT$, т.е. можно сказать, что энергия возрастет в $4/3$ раза. Это означает, что температура газа в сосуде окажется в это же число раз больше (самое забавное, что аккуратная оценка дает тот же результат!) и составит $T \approx 1333$ К.

Число влетевших молекул можно оценивать любым способом – через переданный импульс, просто кинематически и т.п., получится примерно 10^{14} молекул. При этом давление в сосуде окажется порядка 0,001 Па. Это существенно меньше давления снаружи, так что обратным потоком молекул из внутреннего сосуда наружу можно пренебречь.

Р.Александров

Ф1746. *К батарейке напряжением $U = 1{,}5$ В подключена очень длинная цепь из множества одинаковых амперметров и такого же количества одинаковых вольтметров (см. рисунок). Каждый из амперметров имеет сопротивление $r = 1$ Ом, сопротивление каждого вольтметра $R = 10$ кОм. Что показывают первый и второй амперметры? Найдите сумму показаний всех амперметров и сумму показаний всех вольтметров в этой цепи.*



Для начала находим обычным способом сопротивление бесконечной цепочки:

$$R_{общ} = \frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} + rR} = 100{,}5\ \text{Ом}.$$

Тогда ток первого амперметра равен

$$I_1 = \frac{U}{R_{общ}} = 14{,}9\ \text{мА}.$$

Первый амперметр с оставшейся частью схемы образует так называемый делитель напряжения: сопротивление «оставшейся» части составляет $R_{общ} - r = 99{,}5$ Ом, тогда после первого звена к остальной цепи будет приложено напряжение $U \cdot 99{,}5/100{,}5 = 0{,}99U$. Следовательно, второй амперметр покажет

$$I_2 = 0{,}99 I_1 = 14{,}8\ \text{мА}.$$

Сумму показаний всех амперметров можно найти совсем простым способом. Действительно, сумма напряжений амперметров равна напряжению батарейки, т.е. 1,5 В, ток амперметра определяется отношением его напряжения к его сопротивлению, тогда сумма токов равна

$$I_{общ} = \frac{1{,}5\ \text{В}}{1\ \text{Ом}} = 1{,}5\ \text{А}.$$

Сумму напряжений всех вольтметров можно найти таким же способом, но можно и проще – сумма токов всех вольтметров равна току первого амперметра, тогда сумма напряжений равна

$$U_{\text{общ}} = I_1 R = 149 \text{ В}.$$

А.Приборов

Ф1747. *Катушка индуктивности подключена параллельно конденсатору, и они присоединены к источнику переменного напряжения. Измеренный в цепи источника ток равен $I_1 = 1$ А, ток через конденсатор при этом составляет $I_2 = 0,8$ А. Во сколько раз нужно изменить частоту источника, чтобы наступил резонанс?*

Токи соединенных параллельно катушки индуктивности и конденсатора противофазны; следовательно, ток внешней цепи равен разности токов катушки и конденсатора. Тогда ток катушки составляет 1,8 А. Для наступления резонанса частоту источника нужно изменить так, чтобы ток катушки стал меньше, а ток конденсатора больше и чтобы в итоге эти токи сравнялись. Ясно, что для этого частоту следует увеличить в

$$k = \sqrt{1{,}8/0{,}8} = 1{,}5 \text{ раза.}$$

З.Катушкин