ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«Квант» для младших школьников

Задачи

(см. с. 29)

1. 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
П Л А Н Е Т О Б У С

2. Да; например, $A = 4356$, $B = 3465$.

3. Обозначим длины палочек x, y, z, u, а длины отрезков диагоналей сложенного из этих палочек четырехугольника – a, b, c, d (рис.1) так, что

$$\begin{aligned} x^2 &= a^2 + b^2; \\ y^2 &= b^2 + c^2; \\ z^2 &= c^2 + d^2; \\ u^2 &+ d^2 + a^2. \end{aligned} \qquad (*)$$

Если из палочек с длинами x и z сложить катеты одного прямоугольного треугольника, а из палочек с длинами y и u – катеты другого прямоугольного треугольника, то, как следует из равенств (*), гипотенузы у этих треугольников будут одинаковыми. Совместив эти треугольники по гипотенузам, получим четырехугольник с двумя прямыми углами.

4. Представим шары точками, а стенки бильярда – лучами. Отражающийся от прямой l шар S (рис.2) можно заменить симметричным ему относительно прямой l шаром S', беспрепятственно движущимся по прямолинейной траектории, поскольку угол падения шара равен углу отражения. Равенство указанных в условии задачи расстояний сводится к равенству длин отрезков $P'Q''$ и $P''Q'$, где P', Q' – точки, симметричные точкам P и Q относительно прямой OA, а P'', Q'' – точки, симметричные точкам P и Q относительно прямой OB (рис.3). Отрезки $P'Q''$ и $P''Q'$ равны как диагонали равнобочной трапеции $P'P''Q''Q'$.

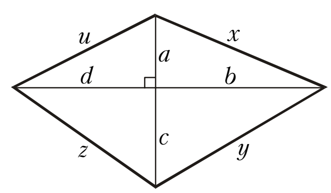

Рис. 1

5. Удобней всего подойти к задаче "с конца", т.е. исходным считать момент, когда в пробирке осталось поровну бактерий и вирусов. Итак, пусть в конечном счете в пробирке осталось M бактерий и столько же вирусов. Сразу возникает вопрос: кто нанес последний удар? Поскольку это неизвестно, рассмотрим обе возможности. Пусть последний удар нанесли бактерии. Тогда перед этим ударом было $M + 3M = 4M$ вирусов, перед предпоследним ударом (нанесенным вирусами) было $M + 2 \cdot 4M = 9M$ бактерий, а перед предыдущим ударом (нанесенным опять бактериями) имелось $4M + 3 \cdot 9M = 31M$ вирусов.

Рис. 2

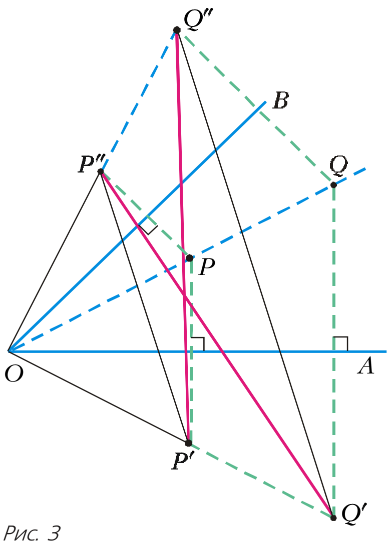

Рис. 3

Обратим внимание, что по условию первыми «стреляли» бактерии, причем произвели они не менее *двух* «залпов». Так что рассмотренный сейчас момент (когда имеется $9M$ бактерий и $31M$ вирусов) вполне мог бы быть исходным. В этом случае общее количество микробов равно $9M + 31M = 40M$, а так как по условию это число равно 2000, то $M = 2000/40 = 50$. Таким образом, в данном случае в итоге борьбы осталось в живых 50 бактерий и 50 вирусов. Предположение, что этот обмен любезностями продолжался дольше, приводит к противоречию. Рассмотрев аналогично вторую возможность, когда последний удар нанесли вирусы, опять получаем противоречие с условием.
Итак, ответ: в результате разразившегося побоища в живых осталось по 50 бактерий и вирусов.

Задачи

(см. «Квант» №5)

1. Слагаемых ШАХ меньше 10, иначе их сумма была бы четырехзначной. Запишем ребус в виде ШАХ × У = МАТ, где У – неизвестная отличная от 0 цифра, возможно совпадающая с одной из цифр, зашифрованных буквами Ш, А, Х, М, Т. Цифры Ш = 1, А = 3, Х = 4, М = 9, Т = 8 удовлетворяют ребусу: 134 × 7 = 938. Покажем, что значение У = 7 наибольшее.
Предположим, что У = 8 или У = 9. Поскольку в этом случае наименьшим трехзначным числом, представленным словом ШАХ, является число 123 (так как Ш = 1, А ≠ 0, Х ≠ 0), то значение У = 9 не подходит: 123 × 9 = 1107. Легко проверить, что в случае У = 8 и наименьшем значении А = 2 ребус 12Х × 8 = 92Т для букв Х и Т решений не имеет, в случае же А ≥ 3 произведение 1АХ × 8 получается четырехзначным.
Итак, гроссмейстер объявил шах семь раз.
2. Пусть первая программа содержала K клипов. Тогда, по условию, вторая программа содержала $1{,}5K$ клипов, а Бивису понравились $K/5$ клипов первой программы и $(1{,}5K) : 2 = 3K/4$ клипов второй программы. По смыслу задачи все эти числа должны быть целыми, откуда следует, что K делится на 4 и на 5, т.е. на 20. Итак, $K = 20m$, где m – натуральное число. Тогда вторая программа содержала $1{,}5 \times 20m = 30m$ клипов, а третья программа – все остальные, т.е. $200 - 20m - 30m = 200 - 50m$ клипов. Это число должно быть положительным, в связи с чем $200 - 50m > 0$, откуда $m < 4$.
Далее, Бивису понравились всего $(20m/5) + (30m/2) = 19m$ клипов. Батт-Хеду понравилось столько же клипов, причем в это число входили все клипы третьей программы. Поэтому $19m \ge 200 - 50m$, и $m \ge 200/69 > 2{,}8$.
Таким образом, $2{,}8 < m < 4$. Единственное натуральное число, удовлетворяющее этим условиям, это $m = 3$. Этот результат позволяет нам восстановить всю картину. Итак, первая программа содержала $20 \times 3 = 60$ клипов, вторая – $1{,}5 \times 60 = 90$ клипов, третья $200 - 60 - 90 = 50$ клипов. Бивису понравились $(60/5) + (90/2) = 57$ клипов, Батт-Хеду – столько же. Ну, а не понравилось каждому из них $200 - 57 = 143$ клипа.
3. Сомкнем выходящие из города дороги в еще один перекресток. Пусть N – общее количество перекрестков вместе с этим. Так как в каждом из перекрестков сходится по три дороги, то общее количество оконечностей дорог $3N$. Это число четное, поскольку каждая дорога в нашем случае имеет два конца. Следовательно, число N – четное, и в городе имеется нечетное количество перекрестков. Поскольку в каждом из них сходятся по одной дороге трех разных цветов, то для каждого цвета найдется дорога, не имеющая двух оконечностей в городе. Итак, все три выходящие из города дороги непременно имеют разные цвета.
4. Воспользуемся следующим очевидным утверждением. Имеется K карточек. Известно, что какие бы M из них ни взять, среди них окажется не менее N особых. В этом случае среди K карточек имеется не менее $K - M + N$ особых.
Считая, что особые карточки – синие, в приложении к условию задачи имеем:

K	M	N	$K-M+N$
100	80	20	40
40	10	2	32

Считая, что особые карточки – красные, в приложении к условию задачи имеем:

K	M	N	$K-M+N$
100	50	30	80
80	20	10	70
70	5	3	68

Итак, в колоде находятся 32 синих и 68 красных карточек.
5. Нет, не удастся. Если бы существовало разбиение пятиугольного поля на параллелограммы, то можно было бы пройти от любого края поля к другому краю, двигаясь по цепочке параллелограммов. Поскольку в пятиугольнике не для каждой стороны существует параллельная ей сторона, то этого сделать нельзя.

Кеплер и винные бочки – австрийские и рейнские

1. Учитывая, что $AB = OA/\sin\alpha$, имеем

$$E = \frac{C}{OA^2}\sin^2\alpha\cos\alpha.$$

Таким образом, если лампу поместить в вершину конуса максимального объема, то окружность его основания получит наибольшую освещенность.
2. Обозначим $a = 4 - x$, тогда $b = 4 + x$ и $ab(b-a) = 2x(16 - x^2)$, причем $0 \le x \le 4$. Максимум достигается при $x = 4/\sqrt{3}$ и равен $256/(3\sqrt{3})$.
3. Обозначим буквой R радиус шара, а буквами r и h – радиус и высоту конуса. Тогда объем конуса равен $V = \pi r^2 h/3$. Продолжив высоту конуса до пересечения с шаром, получим отрезок длиной $2R - h$. Таким образом, через одну точку (центр основания конуса) проходят две хорды: одна из них состоит из отрезков длиной h и $2R - h$, а другая – из двух отрезков длиной r каждый. Значит, $r^2 = h(2R-h)$, так что $V = \pi h^2(2R-h)/3$. Применяя неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом, получим

$$\frac{3V}{4\pi} = \frac{h}{2}\cdot\frac{h}{2}\cdot(2R-h) \le \left(\frac{\frac{h}{2}+\frac{h}{2}+2R-h}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}R^3,$$

где равенство достигается при $\frac{h}{2} = 2R - h$, т.е. при $h = \frac{4}{3}R$.

При такой высоте объем конуса и будет максимальным.

4. Пусть h и r – высота и радиус основания конуса, y и x – высота и радиус основания вписанного цилиндра. Тогда $\frac{x}{r}$ + $\frac{y}{h}$ = 1 и объем цилиндра равен $V = \pi x^2 y = \pi x^2 h\left(1-\frac{x}{r}\right)$. Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 r - x^3$. Ее производная $f'(x) = 2xr - 3x^2$ обращается в ноль при $x = 0$ или $x = \frac{2}{3}r$. Поскольку $f(0) = f(r) < = \frac{4}{27}r^3$, то объем цилиндра максимален при $x = \frac{2}{3}r$ и равен при этом $V = \frac{4\pi}{27}r^2 h$.

5. а) По теореме Пифагора, $a^2 + b^2 = 4r^2$, где a, b – длины сторон прямоугольника. Величина ab^2 наибольшая тогда же, когда и величина $a^2b^4 = \left(4r^2-b^2\right)b^4 = \left(4r^2-x\right)x^2$, где обозначено $x = b^2$. При положительных x функция $f(x) = \left(4r^2-x\right)x^2$ принимает наибольшее значение при $x = \frac{8}{3}r^2$. При этом $b = r\sqrt{8/3}$ и $a = 2r/\sqrt{3}$.

б) В обозначениях пункта а) имеем $b/a = \sqrt{2}$.

6. 4. **7.** $2V/9$. **8.** От 0 до $2S/27$. **9.** $\pi/\left(6\sqrt{3}\right)$.

11. Если $h \le 2$, то $h \ge a > h\sqrt[3]{\frac{5}{9}}$; если $h \ge 2$, то $h \ge a > h\sqrt[3]{1-\frac{3h^2}{(h+1)^3}}$.

12. а) Объем равен $\frac{a^3 n}{6}\sin\varphi\cos^2\varphi\sin\frac{360°}{n}$ и принимает наибольшее значение при $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$.

б) Высота пирамиды равна $h = b\sin\varphi$, а радиус круга, вписанного в основание пирамиды, равен $r = b\cos\varphi$, где φ — угол между боковой гранью и основанием пирамиды. Объем максимален, когда максимальна величина $hr^2 = b^3\sin\varphi\cos^2\varphi$, т.е. когда $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$.

13. $\varphi = 2\arcsin\left(1/\sqrt{3}\right)$. *Указание.* Радиус описанной окружности равен $\frac{a}{2\sin\varphi\cos(\varphi/2)} = \frac{a}{4\sin\frac{\varphi}{2}\left(1-\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)}$. Замена $x = \sin\frac{\varphi}{2}$ сводит задачу к определению наибольшего значения функции $x\left(1-x^2\right)$ при условии $0 < x < 1$.

14. а) $a/6$. б) Нужно найти максимум функции $y = x(a-2x)(b-2x)$, где $0 < x < \min(a,b)/2$. Производная этой функции равна $y' = ab - 4(a+b)x + 12x^2$ и обращается в ноль при $x = \frac{a+b\pm\sqrt{a^2-ab+b^2}}{6}$. Поскольку $a^2 - ab + b^2 \ge \min(a,b)^2$, то вместо «±» следует брать знак «–».

15. а) $a = -p/3$; б) $p^2 \ge 3q$; в) $p^2 \le 3q$.

16. Обозначим буквами h, r, x, y высоту, радиус основания цилиндра и радиусы оснований усеченного конуса соответственно. Тогда

$$\pi r^2 h = \pi\frac{x^2+xy+y^2}{3}h, \text{ т.е. } 3r^2 = x^2+xy+y^2.$$

По теореме Пифагора квадраты диаметров описанных шаров равны $4r^2+h^2$ и $(x+y)^2+h^2$, так что мы должны доказать неравенство $4r^2 > x^2+2xy+y^2 = 3r^2+xy$, т.е. неравенство $r^2 > xy$, которое равносильно неравенству $x^2+xy+y^2 = 3r^2 > 3xy$, т.е. $(x-y)^2 > 0$.

Как линейкой измерить длину волны лазерного излучения?

1. $a = F\lambda/\Delta x = 0{,}6$ мм.

2. $L = \frac{a}{2\alpha(n-1)} = 25$ м; $\Delta x = \frac{\lambda}{2\alpha(n-1)} = 6\cdot10^{-2}$ см; $N = \frac{a}{\Delta x} = 42$.

3. $\Delta n/n = \lambda/L = 5\cdot10^{-6}$.

4. $m = \frac{2h\sqrt{n^2-\sin^2\varphi}}{\lambda} = 390$; $\Delta x = \frac{\lambda L\sqrt{n^2-\sin^2\varphi}}{h\sin\varphi\cos^2\varphi} = 2{,}8$ см.

Задачи о трапециях

1. 5; $\frac{5}{4}$. **2.** $\frac{2ab}{|a-b|}$. **3.** $\frac{1}{n+1}$. Построение, описанное в задаче, позволяет последовательно строить $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ и т.д. часть исходного отрезка. **4.** $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **5.** 6; 2. **6.** 10. *Указание.* Докажите, что сумма площадей трех треугольников, прилежащих к боковым сторонам и меньшему основанию трапеции, равна площади пятиугольника. **7.** $\frac{48}{5}$. *Указание.* Продлите луч BE до пересечения с прямой AD. **8.** 25. **9.** $90\sqrt{3}$. **10.** bd. *Указание.* Проведите через середину отрезка BC прямую, параллельную DE, до пересечения с прямыми BE и CD. **11.** $\frac{(a-b)^3}{16(a+b)}$. **12.** 3 : 29. **13.** $\frac{\sqrt{(b-a)^2+(b+a)^2\operatorname{tg}^2\alpha}}{4\sin\alpha}$. **14.** 10. **15.** $\sqrt{ab}\left(a+b+c+\frac{ab}{c}\right)$.

Московский физико-технический институт

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. (4; 2): (–4; –2). *Указание.* Перемножьте уравнения $\frac{x^4}{y^2} = 72 - xy$, $\frac{y^4}{x^2} = 9 - xy$ и введите переменную $t = xy$.

2. $\pi/4 + \pi n/2$, $n \in \mathbf{Z}$; $\pi k/10$, $k \in \mathbf{Z}$, k не кратно 5. *Указание.* Примените формулу

$$\frac{\sin^2 9x}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 9x}{\cos^2 x} = \frac{4\sin 10x\sin 8x}{\sin^2 2x}.$$

3. $(0;1/4)\cup(1/4;1]\cup(4;16)$. *Указание.* Сделайте замену $t = \log_2 x$.

4. $16\sqrt{6}/25$. *Решение.* Углы DBE и DAE равны, так как они опираются на одну дугу DE (рис.4), обозначим их через α, тогда и $\angle ABF = \alpha$. Из подобия треугольников AKC и FBC (оба – прямоугольные и угол C – об-

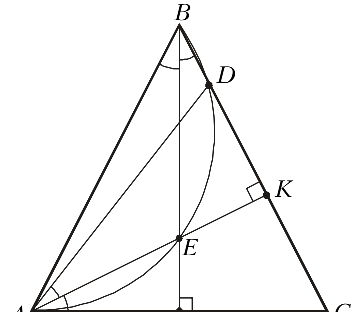

Рис. 4

щий) следует, что $\angle KAC = \angle FBC = \alpha$, $AC = AD = 2AF$. Пусть R − радиус окружности. Так как треугольник ABE вписан в окружность, то $R = AF/\sin 2\alpha$. Из подобия треугольников ABF и AKC имеем $AC/KC = AB/AF$, или $4AF^2 = BC\cdot CD$. Кроме того, $\sin\alpha = AF/BC$. Отсюда следует, что $CD = 16\sqrt{6}/25$.

5. $a > 0$, $a = -1/2$. *Указание.* Учитывая, что $x > 0$, $x \neq 1/2$, рассмотрите взаимное расположение семейства прямых $y = 1 - ax$, $a \in \boldsymbol{R}$, и ветви параболы $y = \sqrt{2x}$ (рис.5).

6. $V = 3\sqrt{11}/28$, $S = 20\sqrt{3}/21$. *Решение.* Так как пирамида $ABCD$ − правильная, то

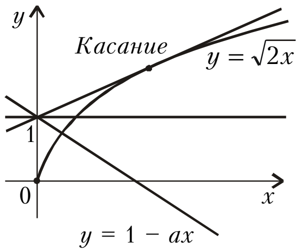

Рис. 5

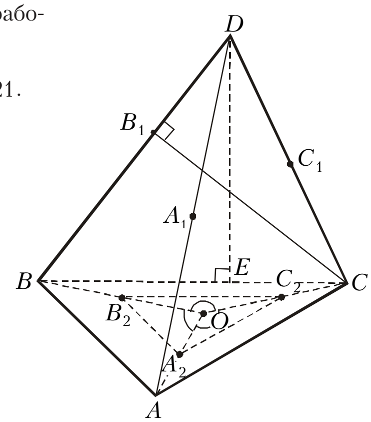

Рис. 6

$AB_1 \perp BD$, и угол между боковыми гранями $\alpha = \angle AB_1C = \arccos(1/10)$ (рис.6). Из треугольника AB_1C получаем

$$2AB_1^2(1-\cos\alpha) = AC^2, \text{ откуда } AB_1 = \sqrt{\frac{AC^2}{2-2\cos\alpha}} = 2\sqrt{5}.$$

Следовательно,

$$\sin\angle B_1BA = AB_1/AB = \sqrt{5}/3;$$
$$\cos\angle ADB = \cos(\pi - 2\angle B_1BA) = 1/9.$$

Обозначим $p = DA_1/DA$, $q = DB_1/DB$, $r = DC_1/DC = 1/2$. Пусть $\varphi = \angle BDE$, где DE − высота треугольника BCD; тогда $\sin\varphi = \sqrt{(1-\cos\angle ADB)/2} = 2/3$, $BD = BE/\sin\varphi = 9/2$. Треугольники BDE и BCB_1 подобны по двум углам, поэтому $BB_1 = (BE/BD)\cdot BC = 4$, $DB_1 = DB - BB_1 = 1/2$, $q = DB_1/DB = 1/9$.

По свойству биссектрисы $DA_1/AA_1 = BD/AB = 3/4$, откуда $p = DA_1/DA = 3/7$.

Пусть V_0 и V − объемы пирамид $ABCD$ и $A_1B_1C_1D$ соответственно. Так как площадь треугольника ABC равна $S_{ABC} = AB^2\sqrt{3}/4 = 9\sqrt{3}$, радиус описанной около треугольника ABC окружности $R = 2\sqrt{3}$, а высота пирамиды $DO = \sqrt{BD^2 - BO^2} = \sqrt{33}/2$, то $V_0 = (1/3)S_{ABC}\cdot DO = 9\sqrt{11}/2$, $V = pqrV_0 = 3\sqrt{11}/28$.

Если A_2, B_2, C_2 − проекции точек A_1, B_1, C_1 соответственно на плоскость ABC, то по теореме Фалеса $OA_2 = pR$, $OB_2 = qR$, $OC_2 = rR$; $\angle A_2OB_2 = \angle B_2OC_2 = \angle C_2OA_2 = 2\pi/3$. Искомая площадь проекции

$$S = \frac{1}{2}\sin(2\pi/3)\left(OA_2\cdot OB_2 + OB_2\cdot OC_2 + OC_2\cdot OA_1\right) =$$
$$= R^2\left(\sqrt{3}/4\right)(pq+qr+rp) = 20\sqrt{3}/21.$$

Вариант 2

1. $[1;2)\cup\left[2+\sqrt{3};6\right)$. *Указание.* Неравенство равносильно системе неравенств

$$x^2 - 7x + 6 \le 0,$$
$$\left(x^2-6x+5\right)^2 - \left(x^2-2x-3\right)^2 < 0.$$

2. πk, $k\in\boldsymbol{Z}$; $\pi/8 + \pi n/4$, $n \in \boldsymbol{Z}$. *Указание.* Примените формулу

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} = \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta.$$

3. (2; 0), (43/4; 21/4). *Решение.* Исходную систему запишем в виде

$$\begin{cases}\left[\log_2(x+y) - \log_2(x-2y)\right]\times \\ \times\left[\log_2(x+y) + 2\log_2(x-2y)\right] = 0, & (1)\\ (x+y)(x-2y) = 4. & (2)\end{cases}$$

Из (1) следует, что либо

$$x + y = x - 2y, \qquad (3)$$

либо

$$(x+y)(x-2y)^2 = 1. \qquad (4)$$

Если

$$x + y > 0,\ x - 2y > 0, \qquad (5)$$

то система (1), (2) равносильна совокупности систем (2), (3) и (2), (4).

Первая из этих систем имеет единственное решение (2; 0), удовлетворяющее условию (5), а вторая, равносильная системе $x - 2y = 1/4$, $x + y = 16$, имеет решение (43/4; 21/4), которое также удовлетворяет (5).

4. $r_1 = 2\sqrt{5}$, $r_2 = \sqrt{5}/2$. *Решение.* $AF = BF = DF$ как касательные к окружности, проведенные из одной точки F. Пусть $AF = x$, $AB = y$, $AE = z$, $EF = d$; r_1 и r_2 − радиусы окружностей C_1 и C_2 (рис.7).

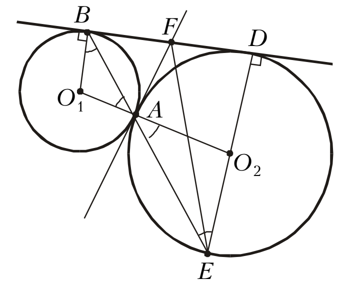

Рис. 7

Углы BAO_1 и EAO_2 равны как вертикальные; треугольники AO_1B и AO_2E равнобедренные ($AO_1 = O_1B = r_1$, $AO_2 = O_2E = r_2$), поэтому $\angle O_1BA = \angle O_2AE = \angle O_1AB$. Так как накрест лежащие углы при прямых O_1B и O_2E равны, то эти прямые параллельны; следовательно, из условия $O_1B \perp BD$ вытекает, что $O_2E \perp BD$ и DE − диаметр C_2, $DE = 2r_2$. Из трапеции O_1BDO_2 находим $BD = 2x = 2\sqrt{r_1r_2}$. Из подобия треугольников AO_1B и AO_2E следует, что $r_1/r_2 = y/z$. Из треугольника BDE получаем $(y+z)^2 = 4x^2 + 4r_2^2$. Из треугольника EFD имеем $d^2 = x^2 + 4r_2^2$. Подставляя в полученную систему $y = 4$, $d = = \sqrt{10}$, находим r_1 и r_2.

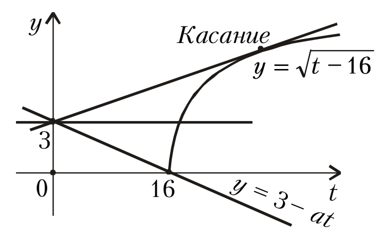

Рис. 8

5. $a \in [0; 3/16]$, $a = -1/16$. *Указание.* Сделав замену $t = x + 7$, рассмотрите взаимное расположение семейства прямых $y = 3 - at$, $a \in \boldsymbol{R}$, и ветви параболы $y = \sqrt{t-16}$ (рис.8).

6. $DC_1/DC = 5/11$, $DA_1/DA = DB_1/DB = 5/6$, $S = 25\sqrt{23}/99$, $\rho = 7/8$. *Решение.* Пусть точки A_1, B_1, C_1 − точки пересечения плоскости P с лучами DA, DB, DC соответственно, $L = DK \cap A_1B_1$ (рис. 9).

Так как $A_1B_1 \perp CM$, а прямая KM − проекция CM на плоскость ABD (плоскости ABD и KDC перпендикулярны), то по теореме о трех перпендикулярах $A_1B_1 \perp KM$; с учетом того, что $AB \perp KM$, получаем $A_1B_1 \parallel AB$. Следовательно, треугольник $A_1B_1C_1$ − равнобедренный ($A_1C_1 = B_1C_1$).

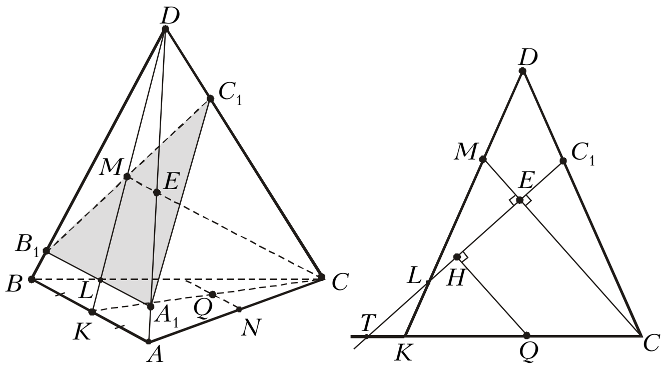

Рис. 9

Пусть $\alpha = \angle ADB/2$, тогда $\sin\alpha = 1/3$, $DC = AC/2\sin\alpha = 3$, $KC = \sqrt{3}$, $DK = \sqrt{DA^2 - (1/4)AB^2} = 2\sqrt{2}$, $KM = MD = \sqrt{2}$,

$$\cos\angle CDK = \frac{DC^2 + DK^2 - KC^2}{2DC \cdot DK} = \frac{7}{6\sqrt{2}},$$

$$MC = \sqrt{DC^2 + DM^2 - 2DC \cdot DM \cos\angle CDK} = 2,$$

$$ME = MC/4 = 1/2,\ CE = (3/4)MC = 3/2,$$

$$\cos\angle DCM = \frac{DC^2 + CM^2 - DM^2}{2DC \cdot CM} = 11/12.$$

Из треугольника CC_1E ($\angle E = \pi/2$) находим $CC_1 = EC/\cos\angle DCM = 18/11$, $DC_1 = DC - CC_1 = 15/11$,

$$\cos\angle KMC = \frac{KM^2 + MC^2 - KC^2}{2KM \cdot MC} = \frac{3}{4\sqrt{2}}.$$

Из прямоугольного треугольника MLE имеем $LM = ME/\cos\angle KMC = 2\sqrt{2}/3$. Отсюда $DL = DM + LM = 5\sqrt{2}/3$ и из подобия треугольников ADB и A_1DB_1 следует, что $DL/DK = 5/6 = DA_1/DA = A_1B_1/AB$, $DA_1 = 5/2$, $A_1B_1 = 5/3$. Так как $\cos 2\alpha = 7/9$, то

$$A_1C_1^2 = DA_1^2 + DC_1^2 - 2DA_1 \cdot DC_1 \cos 2\alpha = \frac{5^2}{2^2 11^2} \cdot \frac{163}{3},$$

$$C_1L = \sqrt{A_1C_1^2 - (1/4)A_1B_1^2} = 10\sqrt{23}/33.$$

Искомая площадь $S = C_1L \cdot A_1B_1/2 = 25\sqrt{23}/99$.

Проведем прямую через точку N параллельно A_1B_1, она пересечет отрезок KC в точке Q, $KQ = QC$,

$$\cos\angle KCM = \frac{KC^2 + MC^2 - MK^2}{2KC \cdot MC} = \frac{5}{4\sqrt{3}}.$$

Из треугольника TEC ($\angle E = \pi/2$) находим $TC = CE/\cos\angle KCM = 6\sqrt{3}/5$. Пусть QH – перпендикуляр, опущенный из точки Q на прямую C_1L. Так как он лежит в плоскости KDC, перпендикулярной сечению, то длина ρ отрезка QH – искомая. Из подобия треугольников TEC и THQ получаем $QH/CE = TQ/TC = (TC - QC)/TC = 7/12$, $\rho = 7CE/12 = 7/8$.

ФИЗИКА

Вариант 1

1. При скольжении монеты по наклонной плоскости от точки C до точки D на нее вдоль наклонной плоскости действовала постоянная по величине сила трения скольжения

$$F_{\text{тр}} = \mu Mg\cos\alpha,$$

где M – масса монеты, а g – ускорение свободного падения. Направлена эта сила противоположно скорости монеты. Работа силы трения скольжения уменьшает кинетическую энергию монеты, и на пути s эта работа равна

$$A_{\text{тр}} = \mu Mgs\cos\alpha.$$

Обозначим скорость монеты в точке D через v. По закону сохранения энергии для точек C и D можно записать

$$\frac{Mv_0^2}{2} = \frac{Mv^2}{2} + MgH + \mu Mgs\cos\alpha.$$

Отсюда получаем

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2g(H + \mu s\cos\alpha)}.$$

2. Пусть максимальная длина налитого слоя ртути равна x. Начальное состояние запертого воздуха таково: объем $V_1 = LS$, где S – площадь внутреннего сечения трубки, а давление $p_1 = p_0 + \rho gL$, где ρ – плотность ртути. После доливания ртути объем запертого воздуха стал $V_2 = (2L - x)S$, а давление стало $p_2 = p_0 + \rho g(L + x)$. Поскольку температура запертого воздуха остается неизменной,

$$p_1V_1 = p_2V_2,$$

или

$$(L_0 + L)L = (L_0 + L + x)(2L - x),$$

где L_0 – длина столбика ртути, соответствующая атмосферному давлению. Полученное квадратное уравнение относительно x позволяет определить максимальную длину налитого слоя ртути:

$x = 350$ мм.

3. До закорачивания пластин *1* и *3* и подключения батареи к пластинам *2* и *4* все пластины были не заряжены. После закорачивания пластин и подключения батареи в результате электростатической индукции на пластинах появятся заряды: $\mp q$ на пластинах *1* и *3* и $\pm Q$ на пластинах *2* и *4* (рис.10).

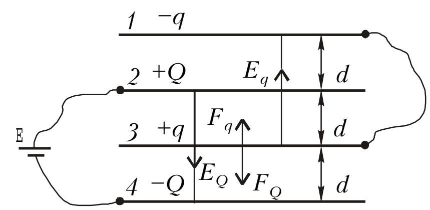

Рис. 10

Запишем условие эквипотенциальности пластин *1* и *3*:

$$E_q \cdot 2d - E_Qd = 0.$$

Отсюда, поскольку

$$E_q = \frac{q}{\varepsilon_0 S} \text{ и } E_Q = \frac{Q}{\varepsilon_0 S},$$

следует, что

$$2q - Q = 0.$$

Условие поддержания на пластинах *2* и *4* разности потенциалов $\mathcal{E}$ позволяет получить второе уравнение для зарядов:

$$E_Q \cdot 2d - E_qd = \mathcal{E},$$

или

$$2Q - q = \frac{\varepsilon_0 S}{d}\mathcal{E}.$$

Решая совместно два уравнения для зарядов, получим

$$q = \frac{\varepsilon_0 S}{3d}\mathcal{E} \text{ и } Q = \frac{2\varepsilon_0 S}{3d}\mathcal{E}.$$

На пластину *3* будут действовать две силы: сила F_Q со стороны электрического поля E_Q и сила F_q как результат взаимодействия пластины *3* с пластиной *1*. Эти силы равны, соответственно,

$$F_Q = qE_Q = \frac{2\varepsilon_0 S}{9d^2}\mathcal{E}^2 \text{ и } F_q = \frac{1}{2}qE_q = \frac{\varepsilon_0 S}{18d^2}\mathcal{E}^2.$$

Результирующая сила, действующая на пластину *3*, равна

$$F_3 = F_Q - F_q = \frac{\varepsilon_0 S}{6d^2}\mathcal{E}^2.$$

4. Рассмотрим прохождение луча света через клин с показателем преломления n_1 (рис.11). Угол преломления β связан

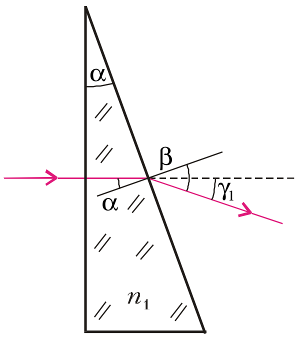

Рис. 11

с углом падения α соотношением $\sin\beta/\sin\alpha = n_1$. Для малых углов можно записать: $\beta = n_1\alpha$. Угол отклонения падающего луча после прохождения клина равен $\gamma_1 = \beta - \alpha = \alpha(n_1 - 1)$. Очевидно, что весь пучок отклонится после прохождения этого клина на угол γ_1. Для второго клина угол отклонения равен $\gamma_2 = -\alpha(n_2 - 1)$ соответственно. Знак «минус» означает отклонение от горизонтали вверх. Общее отклонение пучка после прохождения двух клиньев составляет

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 = -\alpha(n_2 - n_1).$$

Поскольку $n_2 > n_1$, пучок света отклонится вверх, и на экране будет наблюдаться светлая точка на расстоянии

$$l = \alpha(n_2 - n_1)F \approx 10{,}5 \text{ мм}$$

от центра экрана (рис.12). Если убрать пластинку, то светлая точка будет наблюдаться в центре экрана. Следовательно, смещение светлой точки будет

$$l \approx 10{,}5 \text{ мм}.$$

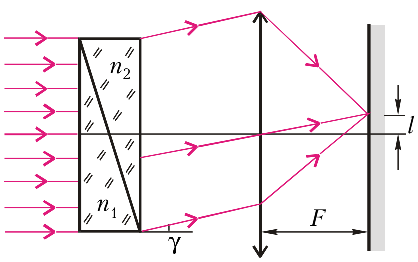

Рис. 12

5. При быстром изменении индуктивности катушки L сохраняется магнитный поток Φ, пронизывающий катушку. Если через катушку течет ток I, энергия магнитного поля катушки равна

$$W_L = \frac{LI^2}{2} = \frac{\Phi^2}{2L}.$$

Изменение индуктивности в этот момент на ΔL ($\Delta L > 0$) приводит к изменению энергии, запасенной в контуре, на

$$-\frac{\Phi^2}{2L^2}\Delta L = -\frac{I^2}{2}\Delta L.$$

В нашем случае при максимальном токе I_0 в катушке происходит уменьшение индуктивности, и, следовательно, в контур закачивается энергия

$$\Delta W_L = \frac{I_0^2}{2}\Delta L.$$

Это происходит через каждые полпериода колебаний тока в контуре, т.е. через $\tau = T/2 = \pi\sqrt{LC}$. При нулевых значениях тока в контуре возвращение индуктивности к прежнему значению не изменяет энергии катушки. За время τ в контуре происходят тепловые потери на резисторе, равные

$$\Delta W_R = \frac{I_0^2}{2}R\tau = \frac{\pi\sqrt{LC}}{2}I_0^2 R.$$

Условие поддержания незатухающих колебаний имеет вид

$$\Delta W_L \ge \Delta W_R.$$

Отсюда получаем

$$\Delta L \ge \pi R\sqrt{LC} \approx 9{,}4\cdot 10^{-3} \text{ Гн}.$$

Вариант 2

1. 1) $v_1 = v/3$; 2) $\tau = \pi\sqrt{2m/(3k)}$.

2. $V = \dfrac{kS\Delta H\rho_в}{(k-1)(\rho - \rho_в)}$.

3. $A_{31} = 3A_{23} - 3A_{12}/2$.

4. 1) $I_0 = (\mathcal{E} - U_0)/R = 5\cdot 10^{-3}$ А;

2) $q = C(\mathcal{E} - U_0) = 5\cdot 10^{-4}$ Кл;

3) $Q = C(\mathcal{E} - U_0)^2/2 = 12{,}5\cdot 10^{-4}$ Дж.

5. $F_2 = 12$ см.

Московский государственный институт электроники и математики

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. а) $\dfrac{5}{6}$; б) $\left(-\dfrac{3}{4}; 6\right)$; в) $\pi + \operatorname{arctg} 3 + 2\pi n$, $\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{3} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

2. а) $\dfrac{180}{13}$; б) $\dfrac{1}{5}$; в) $\dfrac{3\sqrt{65}}{2}$. *Указание.* $\angle C = \dfrac{\pi}{2}$.

3. $\dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

4. $S_{A_1BD} = 12$, $d = \dfrac{2}{3}\sqrt{10}$. *Указание.* Пусть плоскость B_1CD_1 пересекает продолжения ребер AB, AD и AA_1 в точках K, L, M. Пирамиды с общей вершиной A и основаниями A_1BD и KLM гомотетичны с коэффициентом 2. Расстояние между основаниями пирамид равно разности их высот, опущенных из вершины A.

5. $(-1)^n\dfrac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$; $a \in \left(-\infty; -\dfrac{3}{2}\right) \cup \left\{-\dfrac{4}{3}\right\} \cup [-1; +\infty)$. *Указание.* Пусть $u = \sin x$. Тогда первое уравнение имеет единственный корень $u = \dfrac{1}{2}$, а второе сводится к уравнению

$$2(a+2)u^2 + au - a - 1 = 0$$

с ограничением $u \in (0; 1]$. При $a = -2$ уравнения равносильны. При $a \ne -2$ уравнение имеет корни $u_1 = \dfrac{1}{2}$, $u_2 = -\dfrac{a+1}{a+2}$. Тогда равносильность имеет место либо при $u_2 = \dfrac{1}{2}$ (что дает $a = -\dfrac{4}{3}$), либо при $u_2 \le 0$ или $u_2 > 0$ (что дает $a \in (-\infty; 2) \cup \left(-2; -\dfrac{3}{2}\right) \cup [-1; +\infty)$).

Вариант 2

1. $(-1; 2) \cup \left\{\dfrac{7}{2}\right\}$.

2. $\left(\dfrac{1}{13}; \dfrac{1}{4}\right) \cup (2; +\infty)$. *Указание.* $26x^2 + 11x - 1 = (2x+1)(13x-1)$.

3. $x = -\operatorname{arctg}\dfrac{1}{5} + \pi n$, $y = \dfrac{\pi}{4} - \operatorname{arctg}\dfrac{1}{5} + \pi n + 2\pi k$, $n, k \in \boldsymbol{Z}$.

Указание. Из первого уравнения получаем

$$\operatorname{tg} x = 2 \text{ или } \operatorname{tg} x = -\frac{1}{5}.$$

Из третьего уравнения имеем

$$y_1 = x + \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad y_2 = y_1 + \frac{\pi}{2}.$$

Второе уравнение преобразуем к виду

$$11\cos 2y - 10\sin 2y + 5 = 0.$$

Подставим в него выражения для y и выразим левую часть через $\operatorname{tg} x$. Убедимся, что этому уравнению удовлетворяет лишь $\operatorname{tg} x = -\dfrac{1}{5}$ и y_1.

4. 360; 9:55. *Указание.* Отрезок MN параллелен биссектрисе CK угла BCA. Пирамида с основанием AMN гомотетична пирамиде $SACK$.

5. $\frac{3}{2}\sqrt{3}$. *Указание.* Пусть u – абсцисса точки касания. Уравнение перпендикуляра имеет вид

$$y-u^2=-\frac{1}{2u}(x-u).$$

Координаты точки Q находим из системы уравнений

$$\begin{cases} y=x^2, \\ y=-\frac{1}{2u}x+\frac{1}{2}+u^2. \end{cases}$$

Имеем

$$Q=\left(-u-\frac{1}{2u};\ u^2+\frac{1}{4u^2}+1\right).$$

Но тогда

$$PQ^2=\left(2u+\frac{1}{2u}\right)^2+\left(1+\frac{1}{4u^2}\right)^2=\frac{\left(4u^2+1\right)^3}{16u^4},$$

а производная этой функции равна

$$\frac{\left(4u^2+1\right)^2\left(2u^2-1\right)}{4u^5}.$$

ФИЗИКА

1. $F_{\text{н}1}/F_{\text{н}2}=2$. **2.** $v_{\text{к}}=v_0/\sqrt{2}$.

3. $h=\frac{p_{\text{а}}}{\rho_{\text{в}}g}\left(1{,}2\frac{T_1}{T_2}-1\right)=1{,}6$ м. **4.** $A=R\left(T_2+T_4-2\sqrt{T_2T_4}\right)$.

5. $m_{\text{в}}=m-p_{\text{н}}\mathrm{M}V/(RT)=$ 14,2 г, где $p_{\text{н}}=10^5$ Па, M = 18 г/моль.

6. $A=4\pi\varepsilon_0E^2a^3$. **7.** $W=C_1C_2U^2/\left(2\left(C_1+C_2\right)\right)=$ 2,7 мДж.

8. $\eta=1-IU/P=0{,}8=80\%$.

9. $C=\lambda^2\left(\Delta I/\Delta t\right)/\left(4\pi^2c^2\mathcal{E}\right)=$ 6,4 пФ, где $c=3\cdot10^8$ м/с.

10. $F=2d(a-d)/a=$ 8,4 см.

Московский педагогический государственный университет

МАТЕМАТИКА

Вариант 1

1. 6 ч 40 мин. **2.** $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. *Указание.* Дробь в левой части равенства можно сократить.

3. $\left(0;\frac{1}{2}\right]\cup(1;+\infty)$. *Указание.* При $x>0$

$$3\cdot2^{\frac{1}{x}}+4>4\Rightarrow\log_4\left(3\cdot2^{\frac{1}{x}}+4\right)>1.$$

4. –78. *Указание.* Исследуйте данную функцию по отдельности на участках знакопостоянства трехчлена $6+x-x^2$.

5. $\frac{50}{9\sqrt{3}}$. *Указание.* Сечение подобно параллельной ему боковой грани с коэффициентом подобия $\frac{5}{6}$.

Вариант 2

1. 10 ч. **2.** $2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$. **3.** $\left[\frac{1}{\sqrt{3}};\sqrt{3}\right)$.

4. –35,25. **5.** $\operatorname{arctg}2\sqrt{5}$.

Вариант 3

1. $\frac{d^3\cos^2\alpha\sin\alpha}{4\pi}$. **2.** $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5}$, $n\in\mathbf{Z}$. **3.** 2.

4. $\{-1\}\cup[2;+\infty)$. *Указание.* Рассмотрите два случая: $x^2-x-2>0$ и $x^2-x-2=0$.

5. Локальный максимум $f(1)=0$, минимум $f(3)=4$.

Вариант 4

1. 450. *Указание.* Отрежьте от трапеции параллелограмм так, чтобы остался треугольник; найдите его площадь и высоту.

2. $\frac{\pi n}{3}$, $n\in\mathbf{Z}$. *Указание.* Выразите $\sin^2x$ через $\cos2x$; получившиеся две серии решений объедините в одну.

3. $(-\infty;0]\cup[4;+\infty)$. **4.** 1; 2.

5. Максимум $y(-2)=-4$, минимум $y(0)=0$.

Задачи устного экзамена

1. $[-25;3]$. *Указание.* Первое неравенство сводится к $3^{x-3}>2^{2x-6}$, т.е. к $\left(\frac{4}{3}\right)^{x-3}<1$.

2. –2; 0. **3.** $(-\infty;0]\cup[6;+\infty)$.

4. $\frac{1}{2}$. *Указание.* Рассмотрите случаи $q<0$, $q=0$, $q>0$.

5. $(-4;12)$. *Указание.* Для абсциссы $x_0=q-1$ вершины параболы $y=-x^2+2(q-1)x+(3q-13)$ рассмотрите случаи $x_0\le-1$ и $x_0>-1$.

6. $\frac{14}{5}$. *Указание.* Обозначив $a=\lg x$, $b=\lg y$ и перейдя в данном равенстве к логарифмам по основанию 10, найдите связь между a и b. Разумеется, при этом $x>0$, $x\ne1$, $y>0$, $y\ne1$, $y^2x^{-1}\ne1$.

7. 24,75. *Указание.* Убедившись, что уравнение имеет два корня, выразите $x_1^4x_2+x_1x_2^4$ через p и q, где $p=-\left(x_1+x_2\right)=1{,}5$, $q=x_1x_2=-2$.

8. 2,5. *Указание.* Упростив числитель и знаменатель дроби, сократите её.

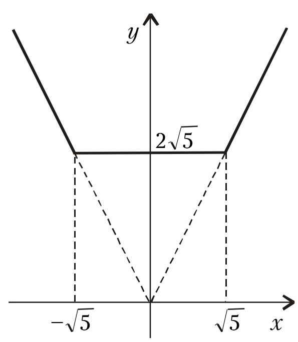

Рис. 13

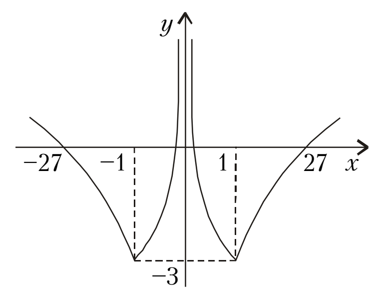

Рис. 14

9. $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.

10. 6.

11, 12, 13. См. рис.13, 14, 15.

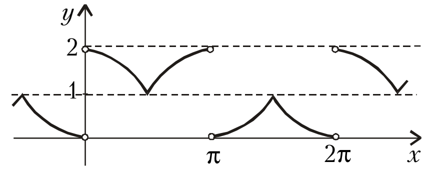

Рис. 15

14. 13,5.

15. $4\sqrt{\frac{16}{\pi}+9\pi}$.

ФИЗИКА

1. 100 кг. **2.** 55°. **3.** 533 Н; 8000 Дж.
4. 9 Н. **5.** 133 Дж. **6.** 93%.
7. 0,8. **8.** 1 мкФ. **9.** 0,72. **10.** $2\cdot10^6$ м/с.