Задачи о трапециях

В.АЛЕКСЕЕВ, В.ГАЛКИН,
В.ПАНФЕРОВ, В.ТАРАСОВ

Среди задач о многоугольниках на вступительных экзаменах в вузы важную долю составляют задачи о трапециях.

Здесь мы обсудим основные подходы к решению таких задач.

Подобие и пропорциональность в трапециях

Важной особенностью трапеций является наличие двух параллельных сторон. При пересечении их (или их продолжений) любой прямой образуются равные углы, что приводит к появлению пар подобных треугольников и, соответственно, пропорциональных отрезков. Также (в соответствии с теоремой Фалеса) пропорциональные отрезки возникают на боковых сторонах трапеции или их продолжениях, если проводится прямая, параллельная основаниям. Следующие задачи показывают, как использовать эти пропорциональности.

Задача 1. *Прямая, параллельная основаниям трапеции, пересекает ее боковые стороны и диагонали последовательно в точках M, P, Q, N (рис.1). Докажите, что $MP = QN$.*

Решение (обозначения см. на рис.

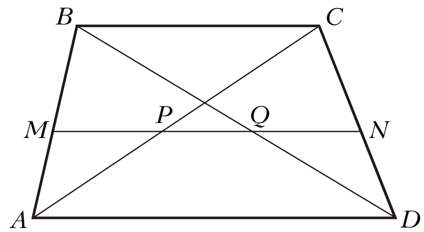

Рис. 1

1). Так как $MN \| BC$, то $\Delta AMP \sim \Delta ABC$, $\Delta DQN \sim \Delta DBC$ и $AM : AB = DN : DC$. Поэтому $\frac{MP}{BC} = \frac{AM}{AB} = \frac{DN}{DC} = \frac{QN}{BC}$. Отсюда $MP = QN$.

Задача 2. *В трапеции ABCD с основаниями AD = a и BC = b через точку O пересечения диагоналей проведена прямая, параллельная основаниям. Эта прямая пересекает боковые стороны в точках M и N. Найдите длину отрезка MN.*

Решение (см. рис.2). Так же, как в задаче 1, получаем, что $MO = ON$. Так как $BC \| AD$, то $\Delta OBC \sim \Delta ODA$ (из

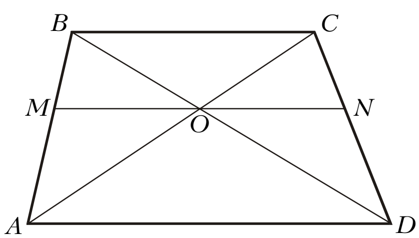

Рис. 2

равенства углов). Отсюда $\frac{BO}{OD} = \frac{BC}{AD} = \frac{b}{a}$ и $\frac{BO}{BD} = \frac{b}{a+b}$. Так как $MN \| AD$, то $\Delta BMO \sim \Delta BAD$. Поэтому $\frac{MO}{AD} = \frac{BO}{BD} = \frac{b}{a+b}$ и $MO = \frac{b}{a+b} AD = \frac{ab}{a+b}$. Поскольку $MO = ON$, то $MN = \frac{2ab}{a+b}$.

Ответ: $MN = \frac{2ab}{a+b}$.

Следующая задача выражает очень важное утверждение о трапециях.

Задача 3. *Докажите, что середины оснований, точка O пересечения диагоналей и точка F пересечения боковых сторон трапеции лежат на одной прямой.*

Решение. Пусть прямая FO пересекает основания трапеции в точках M и N (рис.3). Так как $\Delta FBM \sim \Delta FAN$, $\Delta FMC \sim \Delta FND$, $\Delta OBM \sim \Delta ODN$, $\Delta OMC \sim \Delta ONA$, то $\frac{BM}{AN} = \frac{FM}{FN} =$

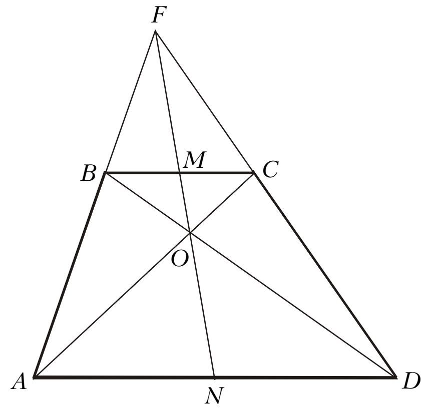

Рис. 3

$= \frac{MC}{ND}$ и $\frac{BM}{ND} = \frac{MO}{ON} = \frac{MC}{AN}$. Отсюда $\frac{BM}{MC} = \frac{AN}{ND}$ и $\frac{BM}{MC} = \frac{ND}{AN}$. Тогда $\frac{AN}{ND} = \frac{ND}{AN}$, и $AN = ND$. Но тогда и $BM = MC$.

Дополнительные построения в трапециях

Обычно трудности у школьников вызывает выбор тех дополнительных построений, которые помогают решить задачу. Для трапеции имеется ряд стандартных дополнительных построений. Отметим те, которые наиболее часто используются при решении задач: 1) опускание высот из концов одного основания на другое основание; 2) проведение через вершины трапеции прямой, параллельной боковой стороне, не содержащей эту вершину; 3) проведение через середину меньшего основания прямых, параллельных боковым сторонам; 4) проведение через вершину трапеции прямой, параллельной диагонали, не содержащей эту вершину; 5) продолжение боковых сторон до пересечения.

Дополнительное построение 1) позволяет разбить трапецию на прямоугольник (стороны которого – одно из оснований и высота трапеции) и 2 прямоугольных треугольника (в которых один из катетов – высота трапеции, а гипотенузы – боковые стороны трапеции). Это часто позволяет произвести нужные вычисления.

Дополнительное построение 2) порождает параллелограмм и треугольник. Это достроение полезно, когда в образовавшемся треугольнике удается получить 3 параметра.

Задача 4. *Постройте трапецию ABCD (BC || AD) по четырем сторонам AB = c, AD = b, BC = a, CD = d (a < b) и найдите ее высоту.*

Решение. Допустим, что искомая трапеция $ABCD$ построена. Проведем

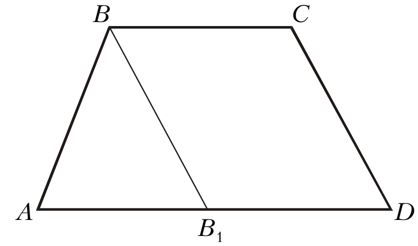

Рис. 4

$BB_1 \| CD$ (рис.4). Получим треугольник ABB_1 с известными сторонами $AB = c$, $BB_1 = CD = d$, $AB_1 = b - a$. Таким образом, по данным задачи можно построить треугольник ABB_1, на луче AB_1 отложить отрезок $AD = b$, через точку B провести прямую, параллельную AD, и отложить на ней отрезок $BC = a$ (в нужную сторону). Высота h трапеции находится, например, из формулы $S = \frac{h(b-a)}{2}$ для площади треугольника ABB_1, где площадь треугольника предварительно вычисляется по формуле Герона.

Ответ:

$$h = \frac{2}{b-a}\sqrt{p(p-c)(p-d)(p-b+a)},$$

где $p = \frac{1}{2}(c + d + b - a)$.

Указанное построение заставляет «работать» боковые стороны, соединив их вместе в треугольнике ABB_1. Дополнительное построение 3) очень близко к 2) и порождает такой же треугольник.

Задача 5. *В трапеции сумма углов при одном из оснований равна 90°. Найдите длину отрезка, соединяющего середины оснований, если длина отрезка, соединяющего середины диагоналей, равна d.*

Решение. Пусть в данной трапеции основания AD и BC ($AD > BC$) и пусть

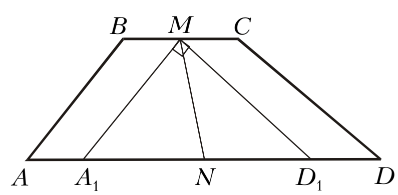

Рис. 5

M – середина стороны BC, N – середина стороны AD. Требуется найти длину MN (рис.5). Проведем из точки M прямые параллельно боковым сторонам до пересечения с основанием AD в точках A_1 и D_1. Тогда сумма углов MA_1D_1 и MD_1A_1 равна 90°, т.е. треугольник MA_1D_1 является прямоугольным. Имеем $AA_1 = BM$ и $D_1D = MC$, поэтому $AA_1 = D_1D$ и $A_1N = ND_1$. Таким образом, MN – медиана

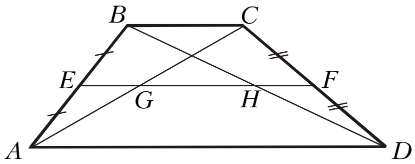

Рис. 6

в прямоугольном треугольнике MA_1D_1, которая, как известно, равна половине гипотенузы A_1D_1. Поскольку $AA_1 = BM$ и $D_1D = MC$, то $A_1D_1 = AD - BC$ и $MN = \frac{A_1D_1}{2} = \frac{AD-BC}{2}$. С другой стороны, пусть EF – средняя линия трапеции (E на AB), и пусть она пересекает диагонали AC и BD в точках G и H (рис.6). Тогда EF параллельна основаниям и поэтому EH – средняя линия в треугольнике ABD, а EG – средняя линия в треугольнике ABC. Поэтому $GH = EH - EG = \frac{AD}{2} - \frac{BC}{2}$. В результате получаем $MN = GH = d$.

Ответ: d.

В тех случаях, когда заданы диагонали трапеции или угол между ними, бывает полезно дополнительное построение 4), порождающее треугольник, в котором 2 стороны равны и параллельны диагоналям трапеции, а длина третьей стороны равна сумме длин оснований трапеции.

Задача 6. *Постройте трапецию $ABCD$ ($DC \| AB$) по двум ее основаниям $DC = a$, $AB = b$ ($a < b$) и двум диагоналям $AC = d_1$, $BD = d_2$.*

Решение. Допустим, что искомая трапеция $ABCD$ построена. Проведем

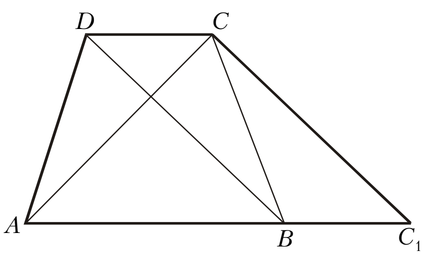

Рис. 7

$CC_1 \| DB$ (рис.7). Получим треугольник ACC_1 с известными сторонами $AC = d_1$, $CC_1 = d_2$, $AC_1 = a + b$. Таким образом, по данным задачи можно построить треугольник ACC_1, на AC_1 отложить отрезок $AB = b$, через точку C провести прямую, параллельную AB, и отложить на ней отрезок $DC = a$ (в нужную сторону).

Указанное дополнительное построение заставляет «работать» обе диагонали, соединив их вместе в треугольнике ACC_1.

Дополнительное построение 5) позволяет сводить задачу о трапеции к задаче о треугольниках.

Задача 7 (МГУ, мехмат, 1999 г.). *В трапеции $ABCD$ с боковыми сторонами $AB = 9$ и $CD = 5$ биссектриса угла D пересекает биссектрисы углов A и C в точках M и N соответственно, а биссектриса угла B пересекает те же две биссектрисы в точках L и K, причем точка K лежит на основании AD.*

а) В каком отношении прямая LN делит сторону AB, а прямая MK – сторону BC?

б) Найдите отношение $MN : KL$, если $LM : KN = 3 : 7$.

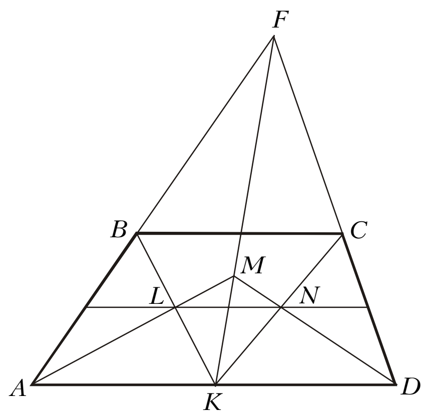

Рис. 8

Решение (см. рис. 8). Так как сумма углов трапеции при боковой стороне AB равна 180° и AM и BK – биссектрисы этих углов, то $\angle LAB + \angle LBA = 90°$. Таким образом, в треугольнике ABK биссектриса AL является высотой. Поэтому $AK = KB = 9$. Аналогично, $KD = CD = 5$. При этом $BL = LK$, $CN = NK$, поэтому LN – средняя линия в треугольнике KBC, а ее продолжение – средняя линия в треугольнике ABK. Значит, LN делит AB в отношении 1 : 1. Продолжим боковые стороны трапеции до пересечения в точке F. Тогда M – точка пересечения биссектрис в треугольнике AFD и FM – третья биссектриса в этом треугольнике. Пусть продолжение FM пересекает AD в точке K_1. Тогда по теореме о биссектрисе $\frac{AK_1}{K_1D} = \frac{AF}{FD} = \frac{AB}{CD} = \frac{9}{5}$. Отсюда следует, что K_1 совпадает с K, т.е. FK проходит через M. При этом легко получить, что прямая MK (или FK) делит сторону BC в том же отношении, что и сторону AD, т.е. 9 : 5. Так как $\angle KLM = \angle KNM = 90°$, то точки K, L, M, N лежат на одной окружности (с диаметром MK). Тогда $\angle MKN = \angle MLN$ (как вписанные углы, опирающиеся на одну дугу). Но $LN \| BC$, поэтому $\angle MLN = \angle MAK$. Таким образом, $\angle MKN = \angle MAK$ и $\Delta NKM \sim \Delta LAK$ (так как $\angle MNK = \angle ALK = 90°$). Аналогично, $\Delta LKM \sim \Delta NDK$. Поэтому $\frac{MK}{AK} = \frac{MN}{LK}$ и $\frac{MK}{KD} = \frac{ML}{KN} = \frac{3}{7}$. Отсюда $MK = \frac{3}{7}KD = \frac{15}{7}$ и $\frac{MN}{LK} = \frac{15}{7} : 9 = \frac{5}{21}$.

Ответ: а) 1 : 1, 9 : 5; б) 5 : 21.

Трапеции и площадь

Наличие параллельных сторон в трапеции порождает ряд интересных свойств, связанных с площадями.

Задача 8. *Диагонали трапеции рассекают ее на 4 треугольника. а) Докажите, что треугольники, примыкающие к боковым сторонам, имеют равную площадь. б) Пусть площади треугольников, примыкающих к основаниям, равным S_1 и S_2. Найдите площадь трапеции.*

Решение (см. рис. 9). а) Так как $BC \| AD$, то высоты в треугольниках ABD и ACD, опущенные на их общее

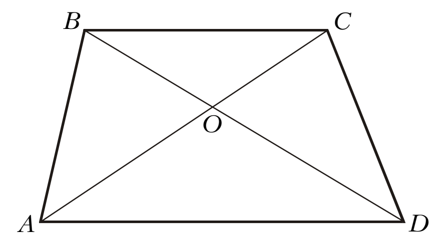

Рис. 9

основание AD, равны. Поэтому равны площади треугольников ABD и ACD. Так как эти треугольники имеют общую часть AOD, то равны также площади треугольников ABO и CDO.

б) Пусть площади треугольников ABO и CDO равны S_3 и S_4. Тогда $S_1 \cdot S_2 = S_3 \cdot S_4$ (докажите, что это равенство справедливо в любом выпуклом четырехугольнике, воспользовавшись тем, что $\sin\angle AOB = \sin\angle BOC = \sin\angle COD = \sin\angle DOA$). В п. а) мы доказали, что $S_3 = S_4$. Поэтому $S_3 = S_4 = \sqrt{S_1S_2}$. Отсюда площадь трапеции равна $S_1 + S_2 + 2\sqrt{S_1S_2} = \left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right)^2$.

Ответ: $\left(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}\right)^2$.

Имеется ряд важных связей площади с дополнительными построениями в трапеции. Так, например, при продолжении боковых сторон образуются подобные треугольники, площади которых относятся как квадраты соответствующих сторон.

Задача 9. *На боковых сторонах AB и CD трапеции ABCD взяты точки M и N так, что отрезок MN параллелен основаниям. При этом площадь трапеции MBCN в k раз больше площади трапеции AMND. Найдите длину MN, если BC = a и AD = b.*

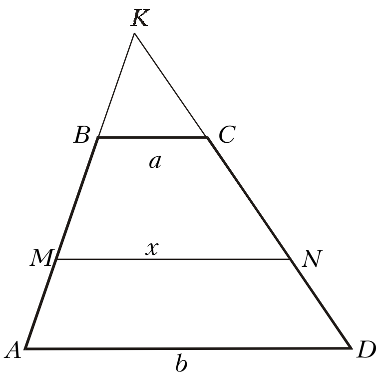

Рис. 10

Решение (см. рис. 10). Пусть длина отрезка $MN = x$ и пусть $a < b$. Продолжим боковые стороны до пересечения в точке K. Получим три подобных треугольника KBC, KMN и KAD с основаниями a, x, b. Для площадей этих подобных треугольников имеем $S_{KBC} : S_{KMN} : S_{KAD} = a^2 : x^2 : b^2$. Так как $S_{BCNM} = S_{KMN} - S_{KBC}$ и $S_{AMND} = S_{KAD} - S_{KMN}$, то $S_{BCNM} : S_{AMND} = \left(x^2 - a^2\right) : \left(b^2 - x^2\right)$. Из условия получаем, что $\frac{x^2 - a^2}{b^2 - x^2} = k$, откуда $x^2 = \frac{a^2 + kb^2}{1 + k}$ и $x = \sqrt{\frac{a^2 + kb^2}{1 + k}}$. Тот же результат получается и при $a > b$. (При $k = 1$ получаем, что длина отрезка MN, параллельного основаниям и делящего площадь трапеции пополам, равна $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$.)

Ответ: $\sqrt{\frac{a^2 + kb^2}{1 + k}}$.

При дополнительном построении 4), когда переносится диагональ, образуется треугольник, площадь которого равна площади трапеции. Это дополнительное построение оказывается ключевым, например, в следующей задаче.

Задача 10 (МГУ, экономический факультет, 1999 г.). *В трапеции ABCD ($AB \| CD$) диагонали AC = a, BD = $\frac{7}{5}a$. Найдите площадь трапеции, если $\angle CAB = 2\angle DBA$.*

Решение. В трапеции даны диагонали. Чтобы заставить их «работать», сделаем стандартное построение – проведем $CC_1 \| DB$ (см. рис.7). Получим треугольник ACC_1, который равновелик трапеции. Действительно, треугольники ADC и CC_1B имеют одинаковое основание ($DC = BC_1$, так как DCC_1B – параллелограмм) и одинаковую высоту, равную высоте трапеции. Поэтому их площади равны, а значит, равны и площади трапеции $ABCD$ и треугольника ACC_1. В треугольнике ACC_1 известны две стороны $AC = a$, $CC_1 = BD = \frac{7}{5}a$ и соотношение между углами. Действительно, если $\angle CC_1A = \angle DBA = \alpha$, то по условию $\angle CAC_1 = 2\alpha$, значит, $\angle ACC_1 = 180° - 3\alpha$. По теореме синусов $\frac{CC_1}{\sin 2\alpha} = \frac{AC}{\sin \alpha}$. Откуда $2\cos\alpha = \frac{CC_1}{AC} = \frac{7}{5}$ и $\cos\alpha = \frac{7}{10}$. Тогда $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \frac{\sqrt{51}}{10}$ (синус положителен, так как $\alpha \in \left(0; 180^\circ\right)$). Для угла ACC_1 имеем

$$\sin\angle ACC_1 = \sin\left(180^\circ - 3\alpha\right) = \sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha = \frac{12\sqrt{51}}{125}.$$

Осталось вычислить площадь:

$$S_{\Delta ACC_1} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CC_1 \cdot \sin\angle ACC_1 = \frac{42\sqrt{51}a^2}{625}.$$

Ответ: $\frac{42\sqrt{51}a^2}{625}$.

Трапеции и окружности

Если окружность описана около трапеции $ABCD$ ($AD \| BC$), это означает, что трапеция – равнобочная (это следует из равенства вписанных углов CAD и ACB). При этом прямая, проходящая через центр окружности перпендикулярно основаниям, является осью симметрии трапеции, что обычно можно активно использовать при решении задач. При вычислениях часто удобно использовать теорему синусов, поскольку окружность, описанная около трапеции, описана и около четырех треугольников, вершины которых совпадают с вершинами трапеции. Иногда полезно (как в следующей задаче) связать возникающие вписанные углы с центральными.

Задача 11. *Трапеция ABCD ($AD \| BC$) вписана в окружность с центром O. Докажите, что точки A, B, O и точка M пересечения диагоналей трапеции лежат на одной окружности.*

Решение. Так как центральный угол AOB и вписанный угол ADB опираются на одну дугу, то $\angle AOB = 2\angle ADB$. Поскольку трапеция равнобочная, то $\angle MAD = \angle MDA$ и $\angle AMB = \angle MAD + \angle MDA = 2\angle ADB = \angle AOB$. Отсюда следует, что окружность, проходящая через A, B, O, проходит также и через M.

Если трапеция $ABCD$ описана около окружности, то у нее также имеется ряд хороших свойств: высота равна диаметру окружности; отрезки сторон от вершин до точек касания попарно равны; $AB + CD = AC + BD$ (как и в любом четырехугольнике, описанном около окружности). Другие интересные свойства содержатся в следующей задаче.

Задача 12. *Пусть трапеция ABCD ($AD \| BC$) описана около окружности с центром O. Докажите, что а) средняя линия трапеции равна полусумме ее боковых сторон; б) боковые стороны видны из центра O под прямым углом (т.е. $\angle AOB = \angle COD = 90°$); в) $AM \cdot MB = CN \cdot ND = r^2$, где M и N – точки касания окружности со сторонами AB и CD соответственно и r – радиус окружности.*

Решение. Утверждение а) следует из того, что средняя линия трапеции равна полусумме оснований и $AB + CD = AC + BD$.

б) Точка O равноудалена от всех сторон трапеции. Поэтому AO, BO, CO, DO – биссектрисы углов A, B, C, D. Так как $\angle BAD + \angle ABC = 180°$, то $\angle OAB + \angle OBA = 90°$ и $\angle AOB = 90°$. Аналогично, $\angle COD = 90°$.

в) Так как треугольник AOB – прямоугольный и OM – высота в нем, то $AM \cdot MB = OM^2 = r^2$ (по теореме о пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике). Аналогично, $CN \cdot ND = ON^2 = r^2$.

Если в задаче имеется трапеция и некоторая окружность, то часто бывает полезно использовать тот факт, что и в трапеции и в окружности возникают равные углы.

Задача 13 (МГУ, мехмат, 1994 г.). *В трапеции ABCD с основаниями AD и BC диагонали AC и BD пересекаются в точке E. Вокруг треугольника ECB описана окружность, а касательная к этой окружности, проведенная в точке E, пересекает прямую AD в точке F таким образом, что точки A, D и F лежат последовательно на этой прямой. Известно, что AF = a, AD = b. Найдите EF.*

Решение (см. рис. 11). Угол CEF заключен между хордой EC и касательной EF. Как известно, он равен половине дуги EC, т.е. вписанному

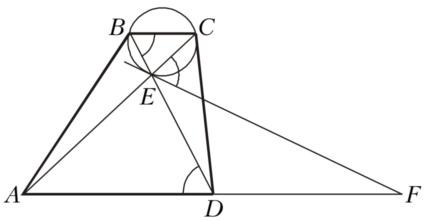

Рис. 11

углу CBE. С другой стороны, в трапеции $\angle CBD = \angle BDA$. Поэтому $\angle CEF = \angle BDA$, откуда $\angle AEF = \angle EDF$. Отсюда следует, что $\Delta FAE \sim \Delta FED$ (у них еще общий угол DFE). Тогда $\frac{EF}{FD} = \frac{AF}{EF}$, и $EF^2 = a(a-b)$. Окончательно, $EF = \sqrt{a(a-b)}$.

Ответ: $EF = \sqrt{a(a-b)}$.

В ряде задач окружность отсутствует в формулировке, но полезна при решении. Важно бывает увидеть саму возможность провести вспомогательную окружность, чтобы получить ключ к решению всей задачи. Эффективность метода вспомогательной окружности подтверждает следующая задача, где оказывается удобным провести сразу две вспомогательные окружности.

Задача 14 (МГУ, физический факультет, 1997 г.). *В трапеции ABCD $BC \| AD$, $\angle ABC = 90°$. Прямая, перпендикулярная стороне CD, пересекает сторону AB в точке M, а сторону CD – в точке N. Известно, что $MC = a$, $NB = b$, а расстояние от точки D до прямой MC равно c. Найдите расстояние от точки A до прямой BN.*

Решение. В задаче присутствуют многочисленные перпендикуляры и прямые углы: $BC \perp AB$, $AD \perp AB$, так как трапеция прямоугольная (рис.12); $MN \perp CD$; $DD_1 \perp MC$ и $DD_1 = c$; $AA_1 \perp BN$ и $AA_1 = x$ – искомая величина; $MC = a$, $NB = b$. Имеем: отрезок MC виден из точек B и N под прямым углом. Поэтому около четырехугольника $BCNM$ можно описать окружность S_1. Диаметр ее известен – это отрезок $MC = a$. Из точек B и C окружности ее хорда MN видна под одним углом α (по следствию из теоремы о вписанном угле), т.е. $\angle MBN = \angle MCN = \alpha$.

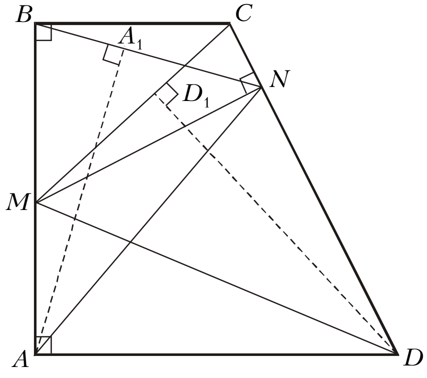

Рис. 12

Отрезок MD виден из точек N и A также под прямым углом. Поэтому около четырехугольника $AMND$ тоже можно описать окружность. Диаметром ее является отрезок MD. Из точек A и D общая хорда двух окружностей (хорда MN) видна под одним углом β: $\angle MAN = \angle MDN = \beta$. В результате имеем два подобных треугольника BAN и CDM (по двум углам). Значит, $\frac{BN}{MC} = \frac{AA_1}{DD_1}$, откуда $AA_1 = x = \frac{BN \cdot DD_1}{MC} = \frac{bc}{a}$.

Ответ: $\frac{bc}{a}$.

Упражнения

1 (МГУ, факультет почвоведения, 1993 г.). Через точку пересечения диагоналей трапеции проведена прямая, параллельная основаниям и пересекающая боковые стороны в точках E и F. Длина отрезка EF равна 2. Определите длины оснований трапеции, если их отношение равно 4.

2. Непараллельные стороны трапеции продолжены до взаимного пересечения и через полученную точку проведена прямая, параллельная основаниям трапеции. Найдите длину отрезка этой прямой, ограниченного продолжениями диагоналей, если длины оснований трапеции равны a и b.

3. Точка K лежит на основании AD трапеции $ABCD$, причем $AK = \frac{1}{n}AD$. Найдите отношение $AM : MD$, где M – точка пересечения с AD прямой, проходящей через точки пересечения прямых AB и CD и прямых BK и AC. Используя решение этой задачи, предложите способ деления данного отрезка на n равных частей ($n = 1, 2, 3, \ldots$) с помощью одной линейки, если дана прямая, ему параллельная.

4. На основании AD трапеции $ABCD$ взята точка E так, что $AE = BC$. Отрезки CA и CE пересекают диагональ BD в точках O и P соответственно. Известно, что $BO = PD$. Найдите отношение $AD : BC$.

5. В трапеции углы при одном из оснований имеют величины 20° и 70°, а длина отрезка, соединяющего середины оснований, равна 2. Найдите длины оснований трапеции, если длина средней линии этой трапеции равна 4.

6. Через концы меньшего основания трапеции проведены две параллельные прямые, пересекающие большее основание. Диагонали трапеции и эти прямые разделили трапецию на семь треугольников и один пятиугольник. Сумма площадей трех треугольников, прилежащих к боковым сторонам и меньшему основанию трапеции, равна 10. Найдите площадь пятиугольника.

7 (МГУ, биологический факультет, 1991 г.). Высота трапеции $ABCD$ равна 7, а длины оснований AD и BC равны 8 и 6 соответственно. Через точку E, лежащую на стороне CD, проведена прямая BE, которая делит диагональ AC в точке O в отношении $AO : OC = 3 : 2$. Найдите площадь треугольника OEC.

8 (МГУ, химический факультет, 1995 г.). Диагонали равнобедренной трапеции перпендикулярны. Найдите площадь трапеции, если ее средняя линия равна 5.

9 (МГУ, психологический факультет, 1990 г.). В трапеции $ABCD$ основание AD равно 16, сумма диагоналей AC и BD равна 36, угол CAD равен 60°. Отношение площадей треугольников AOD и BOC, где O – точка пересечения диагоналей, равно 4. Найдите площадь трапеции.

10 (МГУ, физический факультет, 1996 г.). В трапеции $BCDE$ ($CD \| BE$) $DE = b$, а расстояние от середины отрезка BC до прямой DE равно d. Найдите площадь трапеции.

11 (ЛГУ, матмех, 1980 г.). Боковые стороны трапеции перпендикулярны. Какое наибольшее значение может иметь площадь треугольника, образованного диагоналями и средней линией трапеции, если известно, что длины оснований трапеции равны a и b ($a > b$)?

12 (МГУ, мехмат, 1995 г.). На боковой стороне AB трапеции $ABCD$ взята такая точка M, что $AM : MB = 2 : 3$. На противоположной стороне CD взята такая точка N, что отрезок MN делит трапецию на части, одна из которых по площади втрое больше другой. Найдите отношение $CN : DN$, если $BC : AD = 1 : 2$.

13 (МГУ, физический факультет, 1995 г.). Трапеция $ABCD$ ($BC \| AD$) вписана в окружность. Известно, что $BC = a$, $AD = b$, $\angle CAD = \alpha$. Найдите радиус окружности.

14. Около окружности описана равнобочная трапеция $ABCD$. Окружность касается основания трапеции AD в точке P, а боковых сторон AB и CD – в точках M и K соответственно, при этом $MK = 20$. Найдите длину отрезка, который высекают прямые PB и PC из отрезка MK.

15. В трапецию $ABCD$ вписана окружность которая касается боковых сторон AB и CD в точках M и N соответственно. Найдите площадь трапеции, если $AM = a$, $MB = b$, $CN = c$.