

4. Пусть  $m$  и  $n$  – натуральные числа, причем  $\frac{m}{n}$  – правильная несократимая дробь. На какие натуральные числа можно сократить дробь  $\frac{3n-m}{5n-2m}$ , если известно, что она сократима?

5. Даны два отрезка  $m$  и  $s$ . С помощью циркуля и линейки постройте прямоугольный треугольник, для которого  $s$  – длина гипотенузы,  $m$  – сумма длин катетов.

6. Аквариум частично заполнен водой. За месяц 40% воды испарилось. При этом объем воздуха увеличился на 60%. Какую часть объема аквариума занимала вода в конце месяца?

7. Решите уравнение

$$|2x + 5| = \sqrt{x + 3} + 1.$$

8. Группа студентов сдавала экзамен по математике. Число студентов, сдавших экзамен, оказалось в интервале от 96,8% до 97,6%. Каково наименьшее возможное число студентов в группе?

9. В равнобедренном треугольнике  $ABC$  основание  $AB$  является диаметром окружности, которая пересекает боковые стороны  $AC$  и  $CB$  в точках  $D$  и  $E$  соответственно. Найдите периметр треугольника  $ABC$ , если  $AD = 2$ ,  $AE = \frac{8}{3}$ .

10. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых ровно один корень уравнения

$$x^2 + 2(a-1)x + 3a + 1 = 0$$

удовлетворяет неравенству  $x < -1$ .

11. Решите неравенство

$$\frac{16 - 3x + \sqrt{x^2 - 3x - 4}}{6 - x} \geq 1.$$

12. Решите систему

$$\begin{cases} 2\operatorname{tg}^4 2x + 6\cos^2 y = 5, \\ \frac{2}{\cos^2 2x} + 4\sin y = 1. \end{cases}$$

13. В ромбе  $ABCD$  из вершины  $B$  на сторону  $AD$  опущен перпендикуляр  $BE$ . Найдите углы ромба, если  $2\sqrt{3}CE = \sqrt{7}AC$ .

14. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых функция

$$y = x - \cos 2x + a \cos 6x - 7ax$$

строго убывает на всей числовой оси.

### Вступительное задание по физике

1. Пловец переплывает реку, имеющую ширину  $h = 54$  м. Под каким углом  $\varphi$  к направлению течения он

должен плыть, чтобы переправиться на противоположный берег в кратчайшее время? На какое расстояние  $s$  в этом случае течение снесет пловца вдоль берега, если скорость течения реки  $u = 5$  км/ч, а скорость пловца относительно воды  $v = 1$  м/с?

2. Пешеход треть всего пути бежал со скоростью  $v_1 = 9$  км/ч, треть всего времени шел со скоростью  $v_2 = 4$  км/ч, а оставшуюся часть шел со скоростью, равной средней скорости на всем пути. Найдите эту скорость.

3. Однородное тело массой  $M = 5$  кг плавает на поверхности воды, погружившись на половину своего объема. Найдите объем тела.

4. Гирию, подвешенную к динамометру, опускают в воду до тех пор, пока уровень воды в сосуде с вертикальными стенками не поднимается на  $\Delta h = 5$  см. Показание динамометра при этом изменяется на  $\Delta F = 0,5$  Н. Определите площадь дна сосуда. Плотность воды  $\rho_0 = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>.

5. Взвешивание металлической трубы было произведено при помощи динамометра с предельной нагрузкой 100 Н. В результате взвешивания масса трубы оказалась равной 30 кг. Каким образом (предложите способ) было произведено взвешивание?

6. В электрическом чайнике вода нагревается от 20 °С до кипения за 10 мин. За какое время после этого 20% воды выкипит? Удельная теплоемкость воды  $c = 4,2$  кДж/(кг·°С), удельная теплота парообразования воды  $L = 2300$  кДж/кг. Теплоемкость чайника и теплообмен с окружающей средой не учитывать.

7. В теплоизолированный сосуд с нагревателем постоянной мощности внутри помещены  $m_1 = 1$  кг льда и  $m_2 = 1$  кг легкоплавкого вещества, не смешивающегося с водой, при температуре  $t_1 = -40$  °С. Зависимость температуры в сосуде от времени показана на рисунке 1. Удельная теплоемкость льда  $c_1 = 2$  кДж/(кг·К), твердого вещества  $c_2 = 1$  кДж/(кг·К). Найдите удельную теплоту плавления вещества  $\lambda$  и его удельную теплоемкость  $c_2$  в расплавленном состоянии.

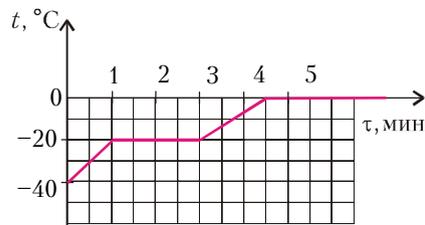


Рис. 1

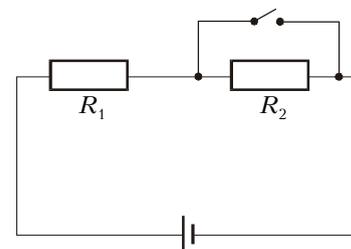


Рис. 2

8. Во сколько раз изменится тепловая мощность, выделяемая в цепи (рис.2), если замкнуть ключ при условии, что  $R_1 = 2R_2$ ? Напряжение источника постоянно.

9. Спортсмен прыгает с 10-метровой вышки и погружается в воду на расстоянии  $L = 3$  м по горизонтали от края вышки через время  $t = 2$  с. Определите скорость спортсмена в момент прыжка. Сопротивлением воздуха пренебречь.

10. Автомобили на автодроме испытываются на скорости  $v = 120$  км/ч.

Рис. 3

Под каким углом  $\alpha$  к горизонту (рис.3) должно быть наклонено полотно дороги с радиусом закругления  $R = 110$  м, чтобы движение автомобиля было наиболее безопасным даже в гололедицу?

11. Два одинаковых пластилиновых шарика массой  $m$  каждый начинают движение одновременно. Первый бросают вертикально вверх со скоростью  $v_0$  с поверхности земли, а второй падает с высоты  $h$  без начальной скорости, как показано на рисунке 4. В воздухе происходит абсолютно неупругое соударение шариков. С какой скоростью упадет на землю комок пластилина, образовавшийся при ударе? Какое количество теплоты выделится при соударении шариков? Сопротивлением воздуха пренебречь.

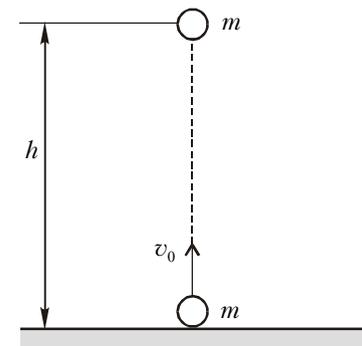


Рис. 4