

в две его вершины. (Другими словами, ребро правильного тетраэдра в $2\sqrt{2}$ раз больше расстояния от центра этого тетраэдра до середины ребра.)

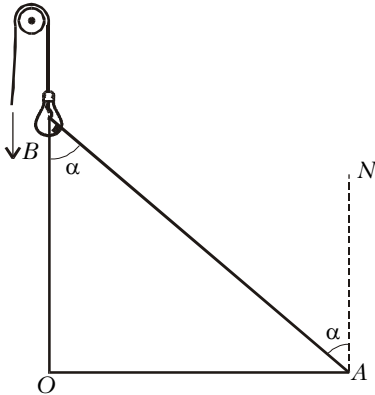


Рис.20

Упражнения

1. Пусть электрическая лампа может передвигаться (например, на блоке) по вертикальной прямой OB (рис.20). На каком расстоянии от горизонтальной плоскости ее следует поместить, чтобы в точке A получить наибольшую освещенность? (Указание. Освещенность E пропорциональна косинусу угла падения лучей ($\angle BAN = \alpha$) и обратно пропорциональна квадрату расстояния AB , т.е. $E = (C \cos \alpha) / AB^2$, где C зависит лишь от лампы.)

2. Найдите $\max_{a \leq b} ab(b-a)$, иными словами, разделите число 8 на две такие части, чтобы произведение их разности на их произведение было максимальным.

3. В данный шар впишите конус максимального объема.

4. В данный конус впишите цилиндр максимального объема, ось которого совпадает с осью конуса.

5. а) Впишите в круг радиуса r прямоугольник так, чтобы произведение одной стороны на квадрат другой было наибольшим. б) Известно, что прочность балки с прямоугольным поперечным сечением пропорциональна ширине и квадрату высоты. Докажите, что у балки наибольшей прочности, выпиленной из круглого бревна, отношение высоты к ширине равно $\sqrt{2}$.

6. Найдите наибольший возможный объем прямоугольного параллелепипеда, основание которого квадрат, а периметр каждой из четырех боковых граней равен 6.

7. Найдите наибольший возможный объем параллелепипеда, вписанного в тетраэдр объема V .

8. Какие значения может принимать

площадь сечения тетраэдра плоскостью, параллельной боковой грани тетраэдра и касающейся вписанного в тетраэдр шара, если сумма площадей граней тетраэдра равна S ?

9. Найдите наибольший возможный объем цилиндра, вписанного в куб со стороной 1 таким образом, что ось цилиндра лежит на диагонали этого

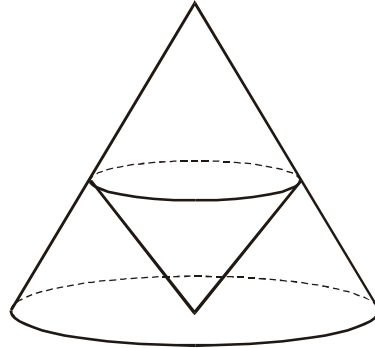


Рис.21

куба.

10. В данный прямой круговой конус вписан прямой круговой конус наибольшего возможного объема, вершина которого находится в центре основания данного конуса (рис.21). Докажите, что высота внутреннего конуса составляет треть высоты данного.

11. Сосуд имеет форму перевернутой вверх дном четырехугольной пирамиды. Сторона основания пирамиды (т.е. сторона отсутствующей «крышки») равна 1, высота равна h . В сосуд налита вода, поверхность которой перпендикулярна высоте пирамиды, а высота водяного столба равна a . В сосуд погружается металлический куб, две параллельные грани которого параллельны поверхности воды. Определите все значения a , при которых можно взять куб такого размера, что при его погружении часть воды выльется из сосуда.

12. а) Боковое ребро a правильной n -угольной пирамиды образует с плоскостью основания угол ϕ . При каком ϕ объем пирамиды наибольший возможный? б) Апофема правильной n -угольной пирамиды равна b . При каком угле наклона боковых граней к основанию объем пирамиды наибольший возможный?

13. Внутри угла величиной ϕ возьмем точку, сумма расстояний от которой до сторон угла равна a , и проведем через нее прямую, перпендикулярную биссектрисе угла. При каком значении ϕ радиус окружности, описанной около полученного треугольника, наименьший возможный?

14. а) Из квадратного жестяного листа со стороной a желают сделать открытый сверху ящик возможно большего объема, вырезав равные квадраты по углам, удалив их и затем загнув жести, чтобы

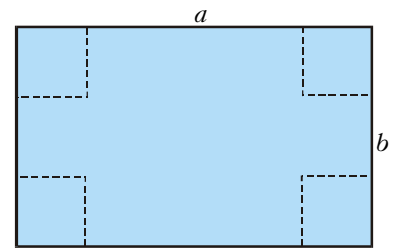


Рис.22

образовать бока ящика. Какова должна

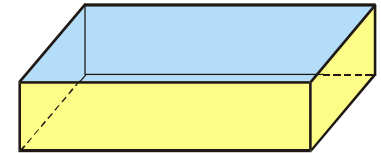


Рис.23

быть длина стороны y вырезаемых квадратов? б) Дан прямоугольный лист жести размером $a \times b$. Вырежьте из его углов одинаковые квадраты (рис.22) так, чтобы после загибания кромок получилась открытая сверху коробка (рис.23) максимального возможного объема.

15. Рассмотрим функцию

а) Докажите, что для любых вещественных чисел p, q, r существует такое число a , что при замене переменной $x = a + t$ коэффициент при t^2 обратится в ноль, и найдите это число. б) Какому неравенству должны удовлетворять числа p, q, r для того, чтобы существовало такое число a , что при замене переменной $x = a + t$ коэффициент при t обратится в ноль? в) Какому неравенству должны удовлетворять числа p, q, r для того, чтобы функция $f(x)$ монотонно возрастала на всей вещественной оси?

16. Если объем и высота некоторого цилиндра равны, соответственно, объему и высоте некоторого усеченного конуса, то радиус шара, описанного около рассматриваемого цилиндра, больше радиуса шара, описанного около рассматриваемого усеченного конуса. Докажите это.

Информацию о журнале «Квант» и некоторые материалы из журнала можно найти в ИНТЕРНЕТЕ по адресам:
 Курьер образования
<http://www.courier.com.ru>
 Vivos Voco!
<http://vivovoco.ru>
 (раздел «Из номера»)