Решения задач М1721—М1725, Ф1730, Ф1733—Ф1742

М1721. *Существуют ли натуральные числа x и y, которые удовлетворяют равенству $x^2 - 3y^2 = 2000$?*

Ответ: не существуют. Число x^2 не может делиться на 3, ибо правая часть – число 2000 – не делится на 3. Значит, x^2 при делении на 3 дает в остатке 1, а вместе с этим и вся левая часть при делении на 3 дает остаток 1. Но 2000 дает в остатке 2 – противоречие.

Любопытно, что если в правой части вместо 2000 поставить 1000 и сохранить вопрос задачи, то ответ снова будет тот же: не существуют. Однако делением на 3 здесь не обойтись. Здесь поможет деление на 5, а как – подумайте сами.

В.Сендеров

М1722. *Пусть a, b – натуральные числа. Проведем через точку $(a;\ b)$ прямую, отсекающую от первого координатного угла треугольник.*

а) Докажите, что количество точек с целыми неотрицательными координатами, которые лежат внутри или на сторонах этого треугольника, превышает $2ab + a + b$.

б) Докажите, что эта оценка точная: через точку $(a;\ b)$ можно провести прямую, отсекающую от первого координатного угла треугольник, внутри и на сторонах которого всего $2ab + a + b + 1$ точек с целыми неотрицательными координатами.

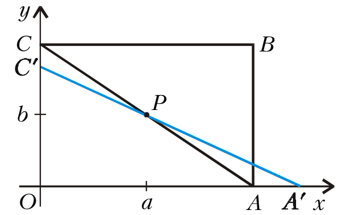


Рис.1

Рассмотрим прямоугольник $OABC$ с центром в точке $P(a;b)$ и сторонами, параллельными осям координат (рис.1). Внутри и на сторонах этого прямоугольника всего $(2a+1)(2b+1) = 4ab + 2a + 2b + 1$ целочисленных точек.

Чуть-чуть сдвинем точку A вправо. Через полученную точку A' и точку P проведем прямую до пересечения с осью ординат в точке C'. Если сдвиг был достаточно мал, то в треугольнике $OA'C'$ не появится ни одной точки с целыми координатами, которой не было в треугольнике OAC.

При центральной симметрии относительно P любая целочисленная точка прямоугольника $OABC$ переходит в целочисленную точку этого же прямоугольника. Поэтому все отличные от P целочисленные точки прямоугольника разбиваются на пары точек, симметричных относительно P.

Итак, если A' достаточно близка к точке A, то внутри и на границе треугольника $OA'C'$ расположена ровно половина отличных от P целочисленных точек, т.е. $2ab + a + b$ точек. Вместе с точкой P получаем всего $2ab + a + b + 1$ точек. Мы решили пункт б).

Теперь займемся пунктом а). Для определенности, пусть прямая отсекает от первого координатного угла треугольник OA_1C_1, где точка A_1 расположена правее точки A (рис.2). Чтобы получить треугольник A_1C_1O из треугольника ACO, достаточно отрезать от последнего треугольник CC_1P и добавить треугольник AA_1P.

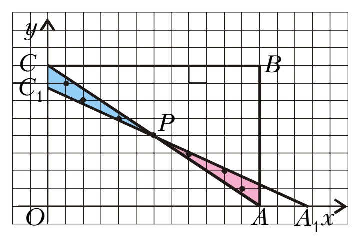


Рис.2

Но при центральной симметрии относительно точки P треугольник CC_1P переходит в (закрашенный на рисунке 2) треугольник, являющийся частью треугольника AA_1P. Целочисленные точки при этом переходят в целочисленные. Задача решена.

М.Панов, А.Спивак

М1723. *Из точки на плоскости выходят n красных и n синих векторов. Красные векторы занумерованы натуральными числами от 1 до n. В порядке нумерации каждый красный вектор поворачивается по часовой стрелке и занимает положение первого свободного синего вектора так, что в конце концов все красные векторы займут положения всех синих векторов. Докажите, что сумма углов поворотов не зависит от порядка нумерации красных векторов.*

Можно считать, что все векторы имеют единичную длину, а их концы располагаются на окружности Q единичного радиуса. Таким образом, на окружности Q имеется n синих и n красных точек, при этом красные точки как-то занумерованы числами от 1 до n.

Пусть C – синяя точка, в которую переходит n-я красная точка. Ближайшую к C по часовой стрелке точку (из отмеченных $2n$ точек) обозначим буквой K. Уясним для себя, что K – красная точка. Предположение о том, что K может быть синей точкой, приводит к противоречию с тем, что в точку C переходит n-я красная точка.

Каждая красная точка при переходе в синюю вычерчивает на окружности Q дугу поворота. Легко заметить, что дуга CK (от точки C к точке K по часовой стрелке) не является частью никакой дуги поворота при исходной нумерации красных точек. Но решающее свойство дуги CK состоит в том, что она не является частью никакой дуги поворота при всякой нумерации красных точек.

Чтобы в этом убедиться, развернем дугу KC, на которой находятся все отмеченные точки, в виде прямолинейного отрезка KC (точка K – левый конец, точка C – правый). При этом всякая дуга поворота при исходной нумерации красных точек превратится в вектор, идущий слева направо из красной точки в синюю. Так что левее всякой точки отрезка KC находится красных точек не меньше, чем синих. Из этого факта следует решающее свойство дуги CK, о котором сказано выше.

Поэтому можно заключить, что при всякой нумерации красных точек любая дуга поворота будет представляться вектором на отрезке KC, идущем слева направо из красной точки в синюю. Сумма длин таких векторов всегда равна разности суммы координат синих точек и суммы координат красных точек.

Но постоянство суммы длин векторов равносильно постоянству суммы углов поворотов.

В.Произволов

М1724. *В треугольнике ABC проведены высоты AD и CE, пересекающиеся в точке O. Прямая DE пересекает продолжение стороны AC в точке K. Докажите, что медиана BM треугольника ABC перпендикулярна прямой OK (рис.1).*

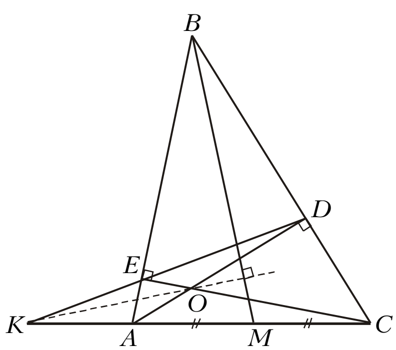


Рис.1

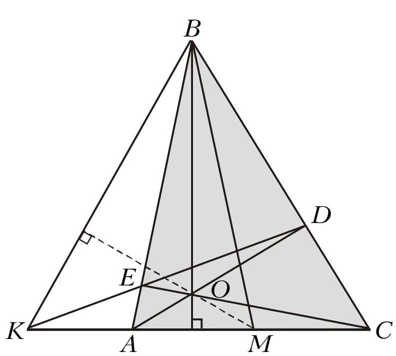


Рис.2

Докажем, что прямая OM перпендикулярна KB. Отсюда непосредственно будет следовать утверждение задачи, поскольку в этом случае O окажется ортоцентром треугольника KBM (рис.2).

Пусть основанием перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую BK, служит точка N (рис.3). Поскольку точки E и N лежат на окружности с диаметром OB, то угол BND равен углу BED. Аналогично, четырехугольник $AEDC$ вписан в окружность с диаметром AC. Поэтому угол BED равен углу ACB. Таким образом, сумма углов KND и ACB равна 180°, т.е. четырехугольник $KNDC$ вписанный. Значит, угол NCK равен углу NDK. Но угол NDE равен углу NBE в силу того, что точки B, D, E и N, как мы уже отмечали, лежат на одной окружности с диаметром OB. Поэтому равны углы NBA и NCA. Т.е. точка N лежит на описанной окружности треугольника ABC.

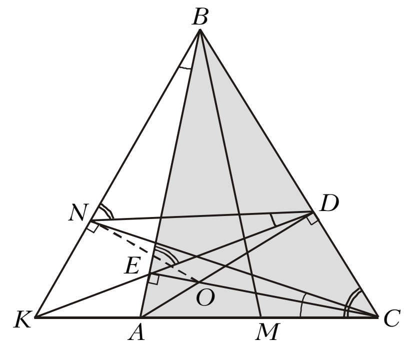


Рис.3

Нам осталось совсем немного. Продолжим прямую NO до пересечения с описанной окружностью треугольника ABC в точке P (рис.4).

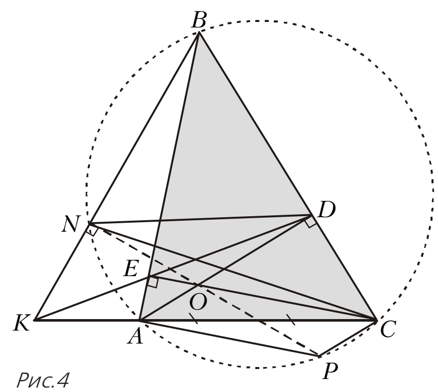


Рис.4

Так как угол BNP прямой, то BP – диаметр этой окружности. Значит, углы BAP и BCP прямые. Поэтому отрезок AP параллелен CE, а PC параллелен AD. Но отсюда $APCO$ – параллелограмм, и прямая NO делит AC пополам, что и требовалось доказать.

М.Волчкевич

М1725*. *Из квадрата $(2n+1)\times(2n+1)$ клетчатой бумаги вырезана крестообразная фигура F (рис.1). Докажите, что*

а) фигуру F нельзя разрезать на 2n выпуклых фигур;

б) если фигура F разрезана на 2n + 1 выпуклых многоугольников, то каждый из них является прямоугольником.

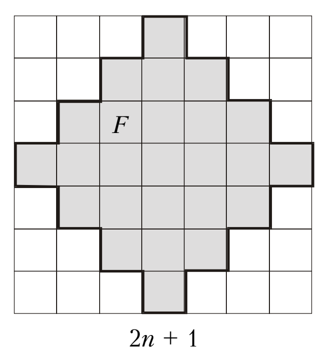


Рис.1

а) Фигура F является многоугольником, который можно заключить в квадрат $ABCD$ так, что на каждой стороне квадрата окажется ровно $n + 1$ угловых вершин многоугольника F (рис.2).

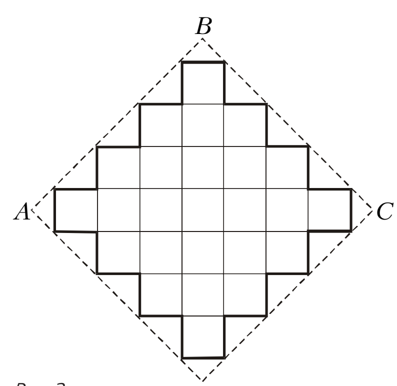


Рис.2

Допустим, что F можно разрезать на $2n$ выпуклых фигур: $F =$

$= \bigcup_{i=1}^{2n} \Phi_i$. Тогда каждая сторона квадрата пересекается ровно с $n+1$ из этих фигур, так как никакая из них по причине выпуклости не может иметь более одной точки ни на какой из сторон квадрата $ABCD$. Но всех выпуклых фигур $2n$ штук, поэтому найдутся две различные фигуры Φ_i и Φ_j такие, что каждая из них имеет по одной точке на каждой из противоположных сторон квадрата AB и CD. Точно так же найдется фигура Φ_k, которая имеет по одной точке на сторонах BC и DA. Но тогда Φ_k имеет общие внутренние точки как с Φ_i так и с Φ_j, что невозможно, так как Φ_k не может совпасть одновременно с Φ_i и с Φ_j, ибо Φ_i и Φ_j различны. Значит, начальное допущение неверно.

б) Многоугольник F разрезан на $2n+1$ выпуклых многоугольников: $F = \bigcup_{i=1}^{2n-1} M_i$. Докажем, что все они – прямоугольники, используя и развивая соображения предыдущего пункта.

Прежде всего сформулируем вспомогательное утверждение: если какой-либо выпуклый многоугольник, содержащийся в F, имеет на сторонах квадрата $ABCD$ четыре точки, то этот многоугольник – прямоугольником (со сторонами, параллельными диагоналям $ABCD$). Для доказательства утверждения нужны лишь свойства выпуклости. Убедитесь в его справедливости самостоятельно.

Далее заметим, что найдется многоугольник M_i, который имеет по одной вершине на сторонах AB и CD квадрата $ABCD$, а также найдется многоугольник M_j, который имеет по одной вершине на сторонах BC и DA. Но тогда M_i и M_j имеют общую внутреннюю точку и потому совпадают $(i=j)$. Значит, M_i является прямоугольником, полупериметр которого равен $2n+2$.

Остается доказать, что остальные многоугольники разрезания (их $2n$) тоже являются прямоугольниками.

Многоугольник F за вычетом прямоугольника M_i распадается на четыре ступенчатые «пирамиды», сумма высот которых равна $2n$. Докажем (и этого будет достаточно!), что если ступенчатая пирамида T высоты k разрезана на k выпуклых многоугольников, то все они – прямоугольники (рис.3). Вершины A_1, A_2, …, A_k принадлежат – по одной – каждому из k многоугольников. Отсюда ясно, что T нельзя разрезать на менее чем k выпуклых многоугольников. Вершины B_1, B_2, …, B_k принадлежат – по одной – каждому из k многоугольников. Но тогда все эти вершины разбиваются на k пар, принадлежащих разным многоугольникам: (A_1, B_1), (A_2, B_2), …, (A_k, B_k). В силу этого каждый из отрезков A_1B_1, A_2B_2, …, A_kB_k является стороной какого-либо из k многоугольников разрезания. Теперь можно сказать, что все доказано, так как эти отрезки как раз разрезают T на k многоугольников, из которых каждый – прямоугольник.

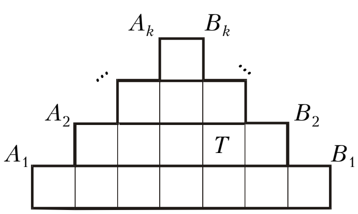


Рис.3

В.Произволов

Ф1730. *В вертикальном цилиндрическом сосуде площадью S = 1 м² под поршнем, находящимся на высоте h = 1 м, содержится N = 100 одинаковых шариков диаметром d = 0,1 мм. Шарики хаотически двигаются, средняя квадратичная скорость шарика v_0 = 100 м/с. Поршень начинают двигать со скоростью u = 1 м/с и останавливают на высоте 2h. Во сколько раз изменится при этом средняя энергия шариков? Потерь механической энергии при соударениях нет, сила тяжести отсутствует.*

Во время движения шарики практически не сталкиваются друг с другом, так как время между двумя последовательными столкновениями для произвольного шарика велико:

$$\tau = \frac{\lambda}{v_0} = \frac{1}{\pi d^2 n v_0} = \frac{Sh}{\pi d^2 N v_0} \approx 3 \cdot 10^3\,\text{с}.$$

Тогда в процессе движения поршня изменение энергии каждого шарика связано только с его ударами о движущийся поршень и определяется изменением вертикальной составляющей скорости шарика. Найдем это изменение. Пусть расстояние от дна сосуда до поршня в некоторый момент равно l, поршень движется вверх со скоростью u, а шарик догоняет его со скоростью v, существенно большей, чем u. В этом случае изменение скорости шарика после удара равно $\Delta v = -2u$. Следующий удар о поршень произойдет через время $\Delta t = 2l/v$. Поршень за это время переместится на

$$\Delta l = u\Delta t = u\frac{2l}{v} = -\frac{\Delta v}{2}\frac{2l}{v} = -l\frac{\Delta v}{v}.$$

Таким образом,

$$v\Delta l + l\Delta v = 0,$$

т.е. произведение lv остается постоянным. Запишем это для вертикальной составляющей скорости шарика:

$$h v_{z0} = 2h v_z,$$

откуда

$$v_z = \frac{1}{2} v_{z0}.$$

Получается, что на высоте $2h$ вертикальная составляющая скорости шарика в 2 раза меньше, чем на высоте h. Вначале кинетическая энергия шарика была

$$W_0 = \frac{m}{2}\left(v_{x0}^2 + v_{y0}^2 + v_{z0}^2\right),$$

где

$$\left(v_{x0}^2\right)_{\text{ср}} = \left(v_{y0}^2\right)_{\text{ср}} = \left(v_{z0}^2\right)_{\text{ср}}.$$

При перемещении поршня изменилась только вертикальная составляющая скорости шарика, следовательно, его полная энергия стала

$$W = \frac{m}{2}\left(v_{x0}^2 + v_{y0}^2 + \frac{1}{4}v_{z0}^2\right) = \frac{3}{4}W_0.$$

Через большой промежуток времени, когда из-за соударений между шариками их движение вновь полностью хаотизируется, средняя квадратичная скорость шариков станет равной

$$v_{\text{ср}} = v_0\sqrt{\frac{3}{4}} \approx 87\ \text{м/с}.$$

Д.Абанин

Ф1733. *Корабль злобных пришельцев из космоса представляет собой цилиндр высотой 100 м и диаметром 100 м, стоящий вертикально на плоской поверхности. Единственной уязвимой точкой корабля является маленький люк, находящийся в центре верхнего круга, да и то только в том случае, если попавший в него снаряд имеет скорость не меньше 20 м/с и прилетает под углом к вертикали не больше 45° (данные получены из источников, заслуживающих полного доверия). В нашем распоряжении имеется маленькая пушка, находящаяся на уровне земли. При какой минимальной скорости вылета снаряда из ствола пушки мы сможем поразить корабль? Стрелять можно под любым углом и из любой точки поверхности земли.*

Удобно «обратить» траекторию снаряда – стрелять из конечной точки (люк) и смотреть, куда и с какой скоростью упадет снаряд. Если при скорости 20 м/с снаряд, вылетающий под углом 45°, перелетит край корабля и упадет на землю – задача будет сразу решена. Однако простой расчет показывает, что снаряд ударится о верхнюю плоскую поверхность цилиндра на расстоянии 40 м от точки выстрела. Ясно, что скорость придется увеличить так, чтобы при том же значении угла дальность превысила 50 м – радиус цилиндра. Для этого подойдет минимальная скорость примерно 22,4 м/с (значение g приближенно принято равным 10 м/с^2). Скорость снаряда внизу, на уровне земли, найдем из закона сохранения механической энергии – она получится 50 м/с.

Можно легко найти и оптимальную точку для стрельбы с поверхности земли (точку падения снаряда при выстреле сверху), но об этом в задаче не спрашивали.

З.Рафаилов

Ф1734. *Через неподвижный блок переброшена легкая нерастяжимая нить, к концам нити прикреплены два одинаковых груза массой M каждый. К боковой поверхности одного из грузов прицепился таракан массой m. Вначале грузы удерживали, причем тяжелый груз находился на H выше легкого. Грузы отпустили. В тот момент когда они поравнялись, таракан прыгнул перпендикулярно боковой поверхности своего груза и уцепился за двигавшийся вверх второй груз. Через какое время грузы снова поравняются? На какую максимальную высоту поднимется груз с тараканом?*

К тому моменту когда грузы в первый раз поравняются, таракан опустится на $H/2$ и скорости тел (по величине они все одинаковы) можно найти из энергетических соображений:

$$\frac{mgH}{2} = \frac{(2M+m)v_1^2}{2},$$

отсюда

$$v_1 = \sqrt{\frac{mgH}{2M+m}}.$$

Прыгая перпендикулярно боковой поверхности опускающегося груза, таракан имеет вертикальную скорость, равную скорости покидаемого им груза, а прыжок не оказывает влияния на скорость этого груза. Но после того как таракан уцепится за поверхность второго груза, скорость системы изменится, и часть энергии системы перейдет в тепло. Найдем новую скорость из закона сохранения импульса (тут не все так просто – есть закрепленный блок, который может «испортить» нам полный импульс, но, достаточно долго рассуждая на эту тему, можно убедить почти всех, что этого не произойдет). Итак, грузы движутся вместе со скоростью v_1, навстречу им с такой же по величине, но противоположной по направлению скоростью летит таракан. Скорость после такого «удара»

$$v_2 = v_1 \frac{2M-m}{2M+m}.$$

Ускорение движущегося с этой начальной скоростью вверх тяжелого груза направлено вниз и равно

$$a = g\frac{m}{2M+m},$$

а время движения до верхней точки равно

$$\tau = \frac{v_2}{a} = \frac{(2M-m)v_1}{mg}.$$

Поравняются грузы еще через τ, значит, искомое время составит

$$t = 2\tau = 2(2M-m)\sqrt{\frac{H}{mg(2M+m)}}.$$

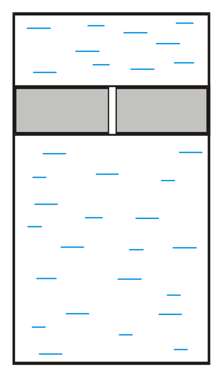
Высота подъема груза с тараканом относительно точки встречи будет

$$h = \frac{1}{2}v_2\tau = \frac{H}{2}\frac{(2M-m)^2}{(2M+m)^2}.$$

Условие этой задачи можно понять и по-другому: таракан прыгает так, что его скорость оказывается параллельной поверхности земли, т.е. он отталкивается от поверхности груза под некоторым углом, чтобы погасить свою вертикальную скорость. Этот вариант задачи для решения проще – два быстрых последовательных толчка в одну сторону и в другую оставляют скорости грузов прежними, а высота подъема относительно точки встречи получается равной $H/2$.

Р.Тараканов

Ф1735. *В высоком вертикальном цилиндрическом сосуде диаметром D, заполненном водой плотностью ρ, находится толстый тяжелый поршень массой M (см. рисунок), плотно прилегающий к боковым стенкам (вода через просвет между поршнем и стенками не протекает). По оси поршня сделано отверстие малого диаметра d ($d \ll D$), через которое вода может перетекать из одной части сосуда в другую. Поршень отпускают, и через некоторое время его движение становится равномерным. Найдите скорость установившегося движения поршня. Вязкость жидкости невелика. Толщина поршня h.*



Обозначим скорость установившегося движения поршня через v. Скорость движения воды в отверстии во много раз больше – она приблизительно равна vD^2/d^2 (мы не будем делать различий между величинами D^2 и $\left(D^2-d^2\right)$ – по условию диаметр дырки во много раз меньше диаметра поршня). Вода движется быстро только в отверстии, а во всех других местах ее скорость мала. На воду со стороны поршня действует вниз сила $F = Mg - F_A = Mg - \rho Shg$, которая за малый интервал времени τ придает большую скорость массе воды $m = \rho Sv\tau$:

$$F\tau = \frac{mvD^2}{d^2} = \frac{\rho Sv^2\tau D^2}{d^2}.$$

Отсюда мы выразим скорость движения поршня:

$$v = \frac{d}{D}\sqrt{\frac{Mg - \rho Shg}{\rho S}} = \frac{d}{D}\sqrt{gh\left(\frac{\rho_{\text{п}}}{\rho} - 1\right)},$$

где $\rho_{\text{п}}/\rho$ – отношение плотности материала поршня к плотности воды. Ответ можно записать и по-другому – через непосредственно заданные в условии задачи величины:

$$v = \frac{d}{D}\sqrt{gh\left(\frac{4M}{\rho\pi D^2 h} - 1\right)}.$$

Характер движения жидкости сильно зависит от формы «входа» отверстия и от вязкости жидкости, поэтому приведенное решение носит очень приблизительный характер.

А.Зильберман

Ф1736. *Две тележки, массы которых M и 3M, соединены легкой пружинкой жесткостью k. Они находятся на гладком горизонтальном столе. Толкнем легкую тележку в направлении более тяжелой, вдоль соединяющей их пружинки, сообщив ей скорость v_0. Через какое время скорость легкой тележки снова станет равной начальному значению? Найдите ее смещение за этот интервал времени.*

Скорость центра масс системы равна $v_0/4$. Относительно центра масс тележки будут колебаться в противофазах. Скорость легкой тележки станет равной своему начальному значению ровно через один период этих колебаний. Длина пружинки от легкой тележки до центра масс составляет $3/4$ полной длины пружинки, следовательно, период колебаний равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{4/3k}} = \pi\sqrt{\frac{3M}{k}}.$$

В тот момент, когда скорость легкой тележки равна v_0, она находится на таком же расстоянии от центра масс, как и в первый момент, значит, смещение тележки равно смещению центра масс:

$$l = \frac{v_0}{4}\pi\sqrt{\frac{3M}{k}}.$$

Р.Александров

Ф1737. *На диаграмме V–T процесс, который проводят с молем разреженного гелия, представляет отрезок прямой $V = V_0 + aT$, причем температура газа в процессе увеличивается от T_0 до $3T_0$ (постоянные V_0, T_0 и a считаются известными). Найдите максимальную и минимальную теплоемкости газа в этом процессе.*

Теплоемкость в таком процессе не остается постоянной (впрочем, выбором констант можно это «поправить»: при $a = 0$ получится $V = \text{const}$, а при $V_0 = 0$ будет постоянным давление – в таких процессах $C = \text{const}$).

Передадим системе очень малое количество теплоты Q, приращение температуры обозначим ΔT. Тогда

$$Q = A + \Delta U = p\Delta V + \frac{3}{2}R\Delta T = \frac{RT}{V}a\Delta T + \frac{3}{2}R\Delta T.$$

Теплоемкость равна

$$C = \frac{Q}{\Delta T} = R\left(\frac{aT}{V} + \frac{3}{2}\right) = R\left(\frac{aT}{V_0 + aT} + \frac{3}{2}\right) = R\left(\frac{5}{2} - \frac{1}{1 + aT/V_0}\right).$$

Видно, что мы получили монотонную функцию температуры, причем в зависимости от знака константы a эта функция с ростом температуры T или возрастает, или убывает. Нужно отметить, что отрицательным может быть и V_0 – при разумном выборе константы a объем на заданном интервале $(T_0, 3T_0)$ вполне может оказаться положительным.

Итак, максимальная и минимальная теплоемкости получаются на краях диапазона $(T_0, 3T_0)$:

$$C_1 = R\left(\frac{5}{2} - \frac{1}{1 + aT_0/V_0}\right),$$

$$C_2 = R\left(\frac{5}{2} - \frac{1}{1 + 3aT_0/V_0}\right).$$

Какая из них максимальная, а какая минимальная, зависит от знака a.

А.Простов

Ф1738. *Большой уединенный проводник при помощи резистора сопротивлением R все время поочередно подключают на время τ_1 к проводнику, потенциал которого поддерживается равным φ_1, и на время τ_2 – к другому проводнику, потенциал которого поддерживается равным φ_2. Считая τ_1 и τ_2 малыми, определите тепловую мощность, рассеиваемую в резисторе.*

Будем считать, что потенциал большого проводника φ мало изменяется за промежутки τ_1 и τ_2. Тогда

$$\frac{\varphi_1 - \varphi}{R}\tau_1 = \frac{\varphi - \varphi_2}{R}\tau_2,$$

откуда

$$\varphi = \frac{\varphi_1\tau_1 + \varphi_2\tau_2}{\tau_1 + \tau_2}.$$

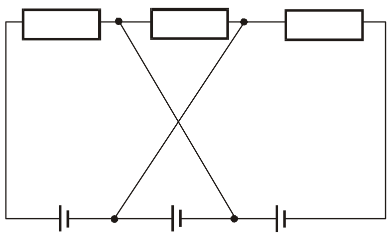
За полный период $(\tau_1 + \tau_2)$ выделяется количество теплоты

$$Q = \frac{(\varphi_1 - \varphi)^2}{R}\tau_1 + \frac{(\varphi - \varphi_2)^2}{R}\tau_2.$$

Средняя мощность равна

$$P_{\text{ср}} = \frac{Q}{\tau_1 + \tau_2} = \frac{(\varphi_1 - \varphi_2)^2}{R}\frac{\tau_1\tau_2}{(\tau_1 + \tau_2)^2}.$$

А.Повторов



Ф1739. *В схеме, изображенной на рисунке, все три батарейки одинаковые, напряжение каждой составляет 3 В, два резистора имеют сопротивления по 100 Ом, сопротивление третьего 200 Ом. Какими могут быть токи через каждую из батареек? Провода в точке пересечения не соединены.*

Тут придется рассмотреть два варианта подключения резисторов – резистор сопротивлением 200 Ом находится посередине или с краю (ясно, что безразлично, с какого именно края – перестановка приводит к очевидному перераспределению токов крайних батарей).

Рассмотрим вначале первый случай. К выделенному резистору приложено напряжение 3 В, ток через него равен 3В/200 Ом = 15 мА и течет справа налево. К резисторам сопротивлением 100 Ом приложены напряжения по 6 В, по каждому из них течет ток 60 мА, направления токов – слева направо. Крайние резисторы подключены последовательно со «своими» батарейками – токи через батарейки равны токам этих резисторов. Осталось найти ток средней батарейки. В узел, соединяющий среднюю и левую батарейки, втекает суммарный ток 60 мА + 15 мА = 75 мА, значит, такой же ток вытекает через подключенный к этому узлу «наклонный» проводник. С учетом направления токов найдем ток через среднюю батарейку: 60 мА + 75 мА = 135 мА, он течет справа налево.

Во втором случае, когда резистор сопротивлением 200 Ом находится слева, ток через него течет слева направо и составляет 6В/200 Ом = 30 мА. Ток через средний резистор течет справа налево и равен 3В/100 Ом = 30 мА, через правый резистор ток равен 6В/100 Ом = 60 мА и течет слева направо. Тогда ток «наклонного» провода из левого узла составляет 60 мА, а ток средней батарейки равен 60 мА + 60 мА = 120 мА.

М.Учителев

Ф1740. *Электромагнит представляет собой катушку, намотанную на цилиндрический сердечник. На оси электромагнита найдем точку, в которой магнитная индукция равна 10^{-3} Тл (это намного меньше поля у торца сердечника), принесем в эту точку небольшой сверхпроводящий круговой виток и расположим его перпендикулярно оси магнита так, чтобы ось проходила через центр витка. При этом в витке возникнет ток 10 А. Отодвинем виток параллельно вдоль оси на 1 см – ток витка уменьшится на 1%. С какой силой магнит действовал на виток в первой точке? Диаметр витка 3 см. Вначале, на большом расстоянии от электромагнита, тока в витке не было.*

Если отойти немного вбок от оси электромагнита, то поле уже не будет направлено точно вдоль оси – появится перпендикулярная составляющая. Именно она и «отвечает» за появление силы, действующей на проводящее кольцо (силы со стороны «осевого» поля только деформируют кольцо). Найдем перпендикулярную составляющую поля там, где будет находиться кольцо, т.е. на расстоянии радиуса кольца от оси. Для этого посчитаем потоки магнитной индукции через площадь кольца в двух его положениях:

$$B_0S = LI_0,\ \left(B_0 - \Delta B\right)S = L\cdot 0{,}99I_0.$$

Разность потоков через «торцы» цилиндра равна потоку через боковую поверхность цилиндра. Считая поле меняющимся совсем слабо при таких небольших смещениях, запишем поток через боковую поверхность в виде $B_{\text{бок}}\pi Dh$. Таким образом,

$$B_{\text{бок}}\pi Dh = 0{,}01B_0S.$$

Отсюда получаем силу, действующую на виток:

$$F = \pi DI_0B_{\text{бок}} = \frac{0{,}01B_0\pi D^2I_0}{4h} = 7\cdot 10^{-6}\ \text{Н}.$$

Можно получить ответ и иначе – приравнивая работу неизвестной силы при перемещении кольца вдоль оси к разности энергий кольца с током в этих двух позициях.

А.Витков

Ф1741. *К источнику переменного напряжения подключены последовательно резистор сопротивлением 200 Ом и катушка индуктивностью 2 Гн, а параллельно этой цепочке включен конденсатор емкостью 10 мкФ. Ток через резистор и катушку имеет амплитуду 0,2 А, ток через конденсатор имеет амплитуду 0,3 А. Найдите по этим данным частоту переменного тока, амплитуду тока, протекающего через источник, и сдвиг фаз между напряжением источника и током через него.*

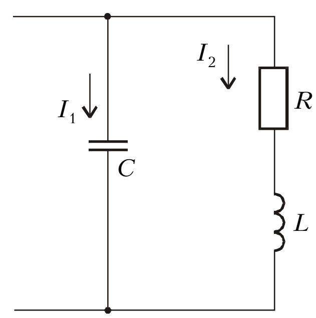


Рис.1

Отношение заданных токов равно(рис.1)

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\sqrt{R^2 + X_L^2}}{X_C} = \frac{3}{2},$$

откуда

$$\frac{9}{4}X_C^2 = R^2 + X_L^2.$$

Подставляя $X_L = \omega L$ и $X_C = \dfrac{1}{\omega C}$, получаем уравнение

$$L^2C^2\omega^4 + R^2C^2\omega^2 - 2{,}25 = 0.$$

Решая его относительно ω^2, найдем

$$\omega^2 = -\frac{R^2}{2L^2}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{9L^2}{C^2R^4}}\right) \approx 7\cdot 10^4\ \text{с}^{-2}.$$

Отсюда частота переменного тока равна

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \approx 42\ \text{Гц}.$$

Теперь нарисуем векторную диаграмму токов и напряже-

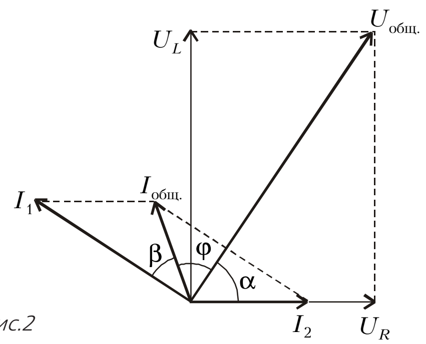


Рис.2

ний, начав с тока I_2. Из рисунка 2 находим

$$U_{общ} = \sqrt{U_R^2 + U_L^2} \approx 113 \text{ В}, \ \alpha = \operatorname{arctg}\frac{U_L}{U_R} \approx 69^\circ,$$

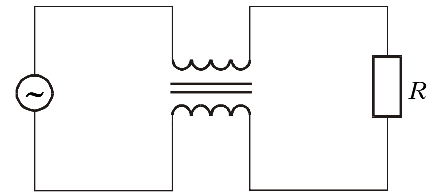
$$I_{общ} = \sqrt{I_1^2 + I_2^2 - 2I_1I_2\cos(90^\circ - \alpha)} \approx 0{,}13 \text{ А},$$

$$\beta = \arcsin\frac{I_2\sin(90^\circ - \alpha)}{I_{общ}} \approx 33^\circ,$$

$$\varphi = 90^\circ - \beta \approx 57^\circ \approx 1 \text{ рад}.$$

А.Старов

Ф1742. *Резистор сопротивлением 200 Ом подключен к сети 220 В, 50 Гц необычным образом – через трансформатор с одинаковыми обмотками (см. рисунок). Индуктивность каждой обмотки составляет 5 Гн. Найдите ток через резистор и сдвиг фаз между этим током и напряжением сети. Сопротивлением проводов и обмоток трансформатора пренебречь, рассеяние магнитного потока считать малым.*



По цепи катушка—резистор—катушка течет некоторый ток. В зависимости от того как включены в цепь катушки (можно поменять местами выводы одной из катушек и все изменить), магнитные поля токов могут складываться друг с другом или вычитаться.

Во втором случае магнитные поля в сердечнике полностью скомпенсируются, и ЭДС индукции обратится в ноль. При этом резистор будет просто включен в сеть своими выводами, поэтому сдвиг фаз между током и напряжением сети окажется нулевым, а ток составит 220В / 200 Ом = = 1,1 А (действующее значение).

Если переключить выводы любой катушки, поля будут складываться и магнитный поток, пронизывающий витки двух катушек, окажется в 4 раза больше, чем при подключении одной катушки в цепь с тем же током (вдвое больше поле и вдвое больше витков). Понятно, что эту необычную цепь легко заменить последовательным включением резистора сопротивлением 200 Ом и катушки индуктивностью $4 \cdot 5$ Гн = 20 Гн. Такая цепь легко «считается» – сдвиг фаз отличается от 90° примерно на 2°, а сила тока составляет

$$\frac{220}{\sqrt{200^2 + (314 \cdot 20)^2}} \text{ А} \approx 35 \text{ мА (действующее значение)}.$$

А.Зильберман

Победители конкурса «Задачник «Кванта» 1998–99 годов

I место заняли

по математике

Жданов Денис – Йошкар-Ола, школа 28;

по физике

Янышин Денис – Канаш, школа 9.

II место заняли

по математике

Шабанов Александр – с.Садовое Воронежской обл., школа 1;

по физике

Дельцов Василий – Чебоксары, школа 54.

III место заняли

по математике

Байденко Борис – Украина, Киев, лицей «Лидер»;

по физике

Янышин Александр – Канаш, школа 9.

Кроме того, в число победителей вошли

по математике

Гуляев Михаил – Нижний Новгород, школа 139,
Галкин Никита – Украина, Макеевка, Донецкий колледж,
Малахов Станислав – Луховицы, школа 2;

по физике

Однороженко Денис – Радужный, школа 2,
Манзюк Максим – Волгоград, гимназия 2,
Ключников Илья – Саратов, лицей Колледжа прикладных наук.

Победители, занявшие первые места по математике и физике, награждаются комплектами журнала «Квант» за второе полугодие 2000 года.