XXVI Всероссийская олимпиада школьников по математике

Заключительный этап олимпиады состоялся с 12 по 18 апреля 2000 года в Казани. Ему предшествовали зональные соревнования в Барнауле, Кирове, Краснодаре, Нижнем Новгороде, а также городские олимпиады Москвы и Санкт-Петербурга. Их победители (180 школьников из 47 регионов России, а также наиболее успешно выступившей на национальной олимпиаде Китая провинции Квантун) провели в столице Республики Татарстан семь запоминающихся дней.

Список призеров олимпиады свидетельствует о более заметных, чем, скажем, 5–7 лет назад, успехах юных математиков из областных центров и небольших городов. Особо отметим Белорецкую компьютерную школу, Гуманитарно-естественный лицей 41 Ижевска и ФМЛ Кирова; именно эти учебные заведения наряду с Московской государственной Пятьдесят седьмой школой и ФМЛ 239 Петербурга были представлены своими учащимися во всех параллелях. Любопытны цифры по Краснодару: 13 участников из 10 разных школ.

Замечательно выступили на олимпиаде ростовчанин *Олег Гольберг* **(9 класс), мурманчанин** *Сергей Волков* **(10 класс), петербуржец** *Юрий Лифшиц* **(11 класс) и кировчанин** *Андрей Халявин* **(ученик 9 класса, выступавший за 11 класс). Эти ребята решили все задачи.**

А команду России для участия в XLI Международной математической олимпиаде составили *В.Дремов, Ю.Лифшиц, А.Поярков, А.Гайфуллин, А.Федотов* **и** *А.Халявин;* **запасным участником был определен** *Е.Зинин.*

В заключение следует поблагодарить оргкомитет, работу которого возглавлял заместитель министра образования Татарстана И.Г.Хадиуллин. Основные события олимпиады происходили в школе 1, а из «нематематической» программы наиболее интересными были экскурсии в музей Н.И.Лобачевского и в казанский Кремль.

Ниже приводятся условия задач зонального и заключительного этапов и список призеров олимпиады.

Задачи олимпиады

Зональный этап

8 класс

1. Ненулевые числа a и b удовлетворяют равенству

$$a^2b^2\left(a^2b^2+4\right)=2\left(a^6+b^6\right).$$

Докажите, что хотя бы одно из них иррационально.

Н.Агаханов

2. В некотором городе на любом перекрестке сходятся ровно три улицы. Улицы раскрашены в три цвета так, что на каждом перекрестке сходятся улицы трех разных цветов. Из города выходят три дороги. Докажите, что они разных цветов.

С.Дужин

3. Какое наименьшее число сторон может иметь нечетноугольник (не обязательно выпуклый), который можно разрезать на параллелограммы?

Л.Емельянов

4. Два пирата делят добычу, состоящую из двух мешков монет и алмаза, действуя по следующим правилам.

Вначале первый пират забирает себе из любого мешка несколько монет и перекладывает из этого мешка в другой такое же количество монет. Затем так же поступает второй пират (выбирая мешок, из которого он берет монеты, по своему усмотрению), и т.д. до тех пор, пока можно брать монеты по этим правилам. Пирату, взявшему монеты последним, достается алмаз. Кому достанется алмаз, если каждый из пиратов старается получить его?

Дайте ответ в зависимости от первоначального количества монет в мешках.

Д.Храмцов

5. Даны 8 гирек массой 1, 2, …, 8 граммов, но неизвестно, какая из них какой массы. Барон Мюнхгаузен утверждает, что помнит массу каждой гирьки, и в доказательство своей правоты готов провести одно взвешивание, в результате которого будет однозначно установлена масса хотя бы одной из гирь. Не обманывает ли он?

А.Шаповалов

6. Пусть от платформы A до платформы B электропоезд прошел за X минут $(0 < X < 60)$. Найдите X, если известно, что как в момент отправления от A, так и в момент прибытия в B угол между часовой и минутной стрелками равнялся X градусам.

С.Токарев

7. Биссектрисы AD и CE треугольника ABC пересекаются в точке O. Прямая, симметричная AB относительно CE, пересекает прямую, симметричную BC относительно AD, в точке K. Докажите, что $KO \perp AC$.

М.Сонкин

8. В стране 2000 городов. Каждый город связан беспосадочными двусторонними авиалиниями с некоторыми другими городами, причем для каждого города число исходящих из него авиалиний есть степень двойки (т.е. 1, 2, 4, 8, …). Для каждого города A статистик подсчитал количество маршрутов, имеющих не более одной пересадки, связывающих A с другими городами, а затем просуммировал полученные результаты по всем 2000 городам. У него получилось 100000. Докажите, что статистик ошибся.

И.Рубанов

9 класс

1. Миша решил уравнение $x^2+ax+b=0$ и сообщил Диме набор из четырех чисел – два корня и два коэффициента этого уравнения (но не сказал, какие именно из них корни, а какие – коэффициенты). Сможет ли Дима узнать, какое уравнение решал Миша, если все числа набора оказались различными?

М.Евдокимов

2. Существуют ли различные взаимно простые в совокупности натуральные числа a, b и c, большие 1 и такие, что 2^a+1 делится на b, 2^b+1 делится на c, а 2^c+1 делится на a?

В.Сендеров

3. На прямой имеется $2n+1$ отрезок. Любой отрезок пересекается по крайней мере с n другими. Докажите, что существует отрезок, пересекающийся со всеми остальными.

С.Берлов

4. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках M и N. Через точку A окружности S_1 проведены прямые AM и AN, пересекающие S_2 в точках B и C, а через точку D окружности S_2 – прямые DM и DN, пересекающие S_1 в

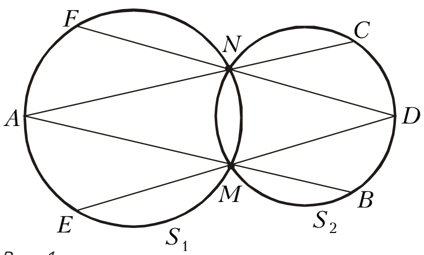

Рис. 1

точках E и F, причем A, E, F лежат по одну сторону от прямой MN, а D, B, C – по другую (рис.1). Докажите, что если $AB = DE$, то точки A, F, C и D лежат на одной окружности, положение центра которой не зависит от выбора точек A и D.

М.Сонкин, Д.Терешин

5. В таблице 99×101 расставлены кубы натуральных чисел, как показано на рисунке 2. Докажите, что

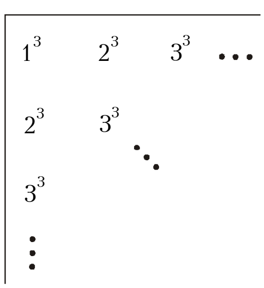

Рис. 2

сумма всех чисел в таблице делится на 200.

Л.Емельянов

6. Среди 2000 внешне неразличимых шариков половина – алюминиевые массой 10 г, а остальные – дюралевые массой 9,9 г. Требуется выделить две кучки шариков так, чтобы массы кучек были различны, а число шариков в них – одинаково. Каким наименьшим числом взвешиваний на чашечных весах без гирь это можно сделать?

С.Токарев

7. На стороне AB треугольника ABC выбрана точка D. Окружность, описанная около треугольника BCD, пересекает сторону AC в точке M, а окружность, описанная около треугольника ACD, пересекает сторону BC в точке N (M, $N \neq C$). Пусть O – центр описанной окружности треугольника CMN. Докажите, что прямая OD перпендикулярна стороне AB.

М.Сонкин

8. Клетки таблицы 200×200 окрашены в черный и белый цвета так, что черных клеток на 404 больше, чем белых. Докажите, что найдется квадрат 2×2, в котором число белых клеток нечетно.

Р.Садыков, Е.Черепанов

10 класс

1. Рассматриваются 2000 чисел: 11, 101, 1001, ... Докажите, что среди этих чисел не менее 99% составных.

В.Произволов, В.Сендеров

2. Среди пяти внешне одинаковых монет три настоящие и две фальшивые, одинаковые по весу, но неизвестно, тяжелее или легче настоящих. Как за наименьшее число взвешиваний найти хотя бы одну настоящую монету?

Л.Емельянов

3. Дан параллелограмм $ABCD$ с углом A, равным 60°. Точка O – центр окружности, описанной около треугольника ABD. Прямая AO пересекает биссектрису внешнего угла C в точке K. Найдите отношение AO/OK.

С.Берлов

4. При каком наименьшем n квадрат $n \times n$ можно разрезать на квадраты 40×40 и 49×49 так, чтобы квадраты обоих видов присутствовали?

В.Замятин

5. Существует ли функция $f(x)$, определенная при всех $x \in \boldsymbol{R}$ и для всех x, $y \in \boldsymbol{R}$ удовлетворяющая неравенству

$$\left|f(x+y) + \sin x + \sin y\right| < 2?$$

Е.Знак

6. По данному натуральному числу a_0 строится последовательность $\{a_n\}$ следующим образом: $a_{n+1} = a_n^2 - 5$, если a_n нечетно, и $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2}$, если a_n четно. Докажите, что при всех нечетных $a_0 > 5$ в последовательности $\{a_n\}$ встретятся сколь угодно большие числа.

А.Храбров

7. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ провели биссектрисы l_a, l_b, l_c, l_d внешних углов A, B, C, D соответственно. Точки пересечения прямых l_a и l_b, l_b и l_c, l_c и l_d, l_d и l_a обозначили через K, L, M, N. Известно, что 3 перпендикуляра, опущенных из K на AB, из L на BC, из M на CD, пересекаются в одной точке. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ вписанный.

П.Кожевников

8. В стране 2000 городов, некоторые пары городов соединены дорогами. Известно, что через любой город проходит не более N различных несамопересекающихся циклических маршрутов нечетной длины (т.е. состоящих из нечетного числа дорог). Докажите, что страну можно разделить на $2N+2$ республики так, чтобы никакие два города из одной республики не были соединены дорогой.

В.Дольников, Д.Карпов

11 класс

1. Докажите, что можно выбрать такие различные действительные числа a_1, a_2, ..., a_{10}, что уравнение

$$(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{10}) =$$
$$= (x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_{10})$$

будет иметь ровно 5 различных решений.

Н.Агаханов

2. Высота и радиус основания цилиндра равны 1. Каким наименьшим числом шаров радиуса 1 можно целиком покрыть этот цилиндр?

И.Рубанов

3. Последовательность a_1, a_2, ..., a_{2000} действительных чисел такова, что для любого натурального n, $1 \le n \le 2000$, выполняется равенство

$$a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3 = \left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right)^2.$$

Докажите, что все члены этой последовательности – целые числа.

С.Тухвебер

4. См. задачу 4 для 10 класса.

5. Для неотрицательных чисел x и y, не превосходящих 1, докажите, что

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} \le \frac{2}{\sqrt{1+xy}}.$$

А.Храбров

6. Окружность, вписанная в треугольник ABC, имеет центр O и касается стороны AC в точке K. Вторая окружность – также с центром O – пересекает все стороны треугольника ABC. Пусть E и F – ее точки пересечения со сторонами AB и BC соответственно, ближайшие к вершине B; B_1 и B_2 – точки ее пересечения со стороной AC, B_1 – ближе к A. Докажите, что точки B, K и точка P пересечения отрезков B_2E и B_1F лежат на одной прямой.

М.Сонкин

7. Даны числа 1, 2, ..., N, каждое из которых окрашено либо в черный, либо в белый цвет. Разрешается перекрашивать в противоположный цвет любые три числа, одно из которых равно полусумме двух других. При каких N всегда можно сделать все числа белыми?

С.Токарев

8. См. задачу 8 для 10 класса.

Заключительный этап

9 класс

1. Различные числа a, b и c таковы, что уравнения $x^2 + ax + 1 = 0$ и $x^2 + bx + c = 0$ имеют общий действительный корень. Кроме того, общий действительный корень имеют уравнения $x^2 + x + a = 0$ и $x^2 + cx + b = 0$. Найдите сумму $a + b + c$.

Н.Агаханов

2. Таня задумала натуральное число $X \le 100$, а Саша пытается его угадать. Он выбирает пару натуральных чисел M и N, меньших 100, и задает вопрос: «Чему равен наибольший общий делитель $X + M$ и N?». Докажите, что Саша может угадать Танино число, задав 7 таких вопросов.

А.Голованов

3. Пусть O – центр описанной окружности ω остроугольного треугольника ABC. Окружность ω_1 с центром K проходит через точки A, O, C и пересекает стороны AB и BC в точках M и N. Известно, что точки L и K симметричны относительно прямой MN. Докажите, что $BL \perp AC$.

М.Сонкин

4. В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены дорогами. При этом из каждого города выходит хотя бы 3 дороги. Докажите, что существует циклический маршрут, длина которого (т.е. количество входящих в него дорог) не делится на 3.

Д.Карпов

5. На доску последовательно выписываются числа $a_1 = 1$, a_2, a_3, ... по следующим правилам: $a_{n+1} = a_n - 2$, если число $a_n - 2$ натуральное и еще не выписано на доску, в противном случае $a_{n+1} = a_n + 3$. Докажите, что все квадраты натуральных чисел появятся в этой последовательности при прибавлении 3 к предыдущему числу.

Н.Агаханов

6. См. задачу М1745 «Задачника «Кванта».

7. На медиане CD треугольника ABC отмечена точка E. Окружность S_1, проходящая через E и касающаяся прямой AB в точке A, пересекает сторону AC в точке M. Окружность S_2, проходящая через E и касающаяся прямой AB в точке B, пересекает сторону BC в точке N. Докажите, что описанная окружность треугольника CMN касается S_1 и S_2.

М.Сонкин

8. По окружности расставлены 100 натуральных чисел, взаимно простых в совокупности. Разрешается прибавлять к любому числу наибольший общий делитель его соседей. Докажите, что при помощи таких операций можно сделать все числа попарно взаимно простыми.

С.Берлов

10 класс

1. См. задачу М1743 «Задачника «Кванта».

2. Пусть $-1 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < 1$ и $x_1^{13} + x_2^{13} + \ldots + x_n^{13} = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$. Докажите, что если $y_1 < y_2 < \ldots < y_n$, то

$$x_1^{13}y_1 + x_2^{13}y_2 + \ldots + x_n^{13}y_n < x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n.$$

О.Мусин

3. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC биссектриса острого угла между высотами AA_1 и CC_1 пересекает стороны AB и BC в точках P и Q соответственно. Биссектриса угла B пересекает отрезок, соединяющий ортоцентр треугольника ABC с серединой стороны AC, в точке R. Докажите, что точки P, B, Q и R лежат на одной окружности.

С.Берлов

4. Имеются пять внешне одинаковых гирь с попарно различными массами. Разрешается выбрать любые три из них A, B и C и спросить, верно ли, что $m(A) < m(B) < m(C)$ (через $m(x)$ обозначена масса гири x); при этом дается ответ «Да» или «Нет». Можно ли за девять вопросов гарантированно узнать, в каком порядке идут массы гирь?

О.Подлипский

5. Пусть M – конечное множество чисел. Известно, что среди любых трех его элементов найдутся два, сумма которых принадлежит M. Какое наибольшее число элементов может быть в M?

Е.Черепанов

6. Совершенное число, большее 6, делится на 3. Докажите, что оно делится на 9. (Натуральное число называется *совершенным*, если оно равно сумме всех своих делителей, отличных от самого числа, например $6 = 1 + 2 + 3$.)

А.Храбров

7. Даны две окружности, касающиеся внутренним образом в точке N. Хорды BA и BC внешней окружности касаются внутренней в точках K и M соответственно. Пусть Q и P – середины дуг AB и BC, не содержащих точку N. Окружности, описанные около треугольников BQK и BPM, пересекаются второй раз в точке B_1. Докажите, что BPB_1Q – параллелограмм.

Т.Емельянова

8. См. задачу М1744 «Задачника «Кванта».

11 класс

1. Найдите все функции $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, которые для всех $x, y, z \in \mathbf{R}$ удовлетворяют неравенству

$$f(x+y) + f(y+z) + f(z+x) \ge 3f(x+2y+3z).$$

Н.Агаханов, О.Подлипский

2. Докажите, что можно разбить все множество натуральных чисел на 100 непустых подмножеств так, чтобы в любой тройке a, b, c такой, что $a + 99b = c$, нашлись два числа из одного подмножества.

Д.Джукин, Ф.Петров, И.Богданов, С.Берлов

3. На координатной плоскости дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$ с вершинами в целых точках. Докажите, что внутри или на границе пятиугольника $A_1B_1C_1D_1E_1$ (рис.3) есть хотя бы одна целая точка.

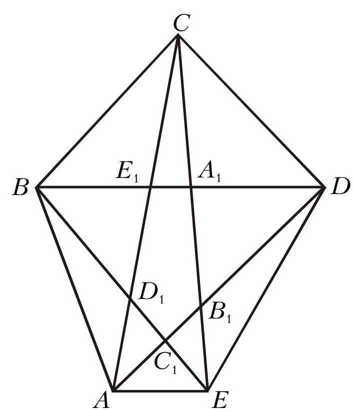

Рис. 3

В.Дольников, И.Богданов

4. Дана последовательность неотрицательных чисел a_1, a_2, ..., a_n. Для любого k от 1 до n обозначим через m_k величину

$$\max_{l=1,2,\ldots,k} \frac{a_{k-l+1} + a_{k-l+2} + \ldots + a_k}{l}.$$

Докажите, что при любом $\alpha > 0$ число тех k, для которых $m_k > \alpha$, меньше чем $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{\alpha}$.

В.Дольников

5. Докажите неравенство

$$\sin^n 2x + \left(\sin^n x - \cos^n x\right)^2 \le 1.$$

А.Храбров

6. Совершенное число, большее 28, делится на 7. Докажите, что оно делится на 49. (Натуральное число называется *совершенным*, если оно равно сумме всех своих делителей, отличных от самого числа, например 6 = = 1 + 2 + 3.)

А.Храбров

7. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности ω. Продолжения сторон AB и CD пересекаются в точке O. Окружность ω_1 касается стороны BC в точке K и продолжений сторон AB и CD, окружность ω_2 касается стороны AD в точке L и продолжений сторон AB и CD. Известно, что точки O, K, L лежат на одной прямой. Докажите, что середины сторон BC, AD и центр окружности ω лежат на одной прямой.

П.Кожевников

8. Клетки таблицы 100×100 окрашены в 4 цвета так, что в любой строке и в любом столбце ровно по 25 клеток каждого цвета. Докажите, что найдутся две строки и два столбца, на пересечении которых все четыре клетки окрашены в разные цвета.

С.Берлов

Призеры олимпиады

Дипломы I степени

по 9 классам получили
Гольберг Олег – Ростов-на-Дону, школа 8,
Дубашинский Михаил – Санкт-Петербург, школа 527, 7 кл.,
Стырт Олег – Омск, лицей 64;

по 10 классам –
Волков Сергей – Мурманск, Политехнический лицей;

по 11 классам –
Гайфуллин Александр –Раменское, муниципальная гимназия,
Лифшиц Юрий– Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Халявин Андрей – Киров, ФМЛ, 9 кл.

Дипломы II степени

по 9 классам получили
Деркач Мария – Калуга, школа 4,
Кобзев Владимир – Белорецк, Компьютерная школа,
Куликов Егор – Ярославль, школа 33,
Куюмжиян Каринэ – Ростов-на-Дону, школа 8, 8 кл.,
Миргасимов Алмаз – Набережные Челны, гимназия 26, 8 кл.,
Митричев Петр – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа,
Порсев Анатолий – Ижевск, Гуманитарно-естественный лицей 41,
Сороцкий Евгений – Санкт-Петербург, гимназия 70;

по 10 классам –
Акопян Арсений – Москва, лицей «Вторая школа»,
Бурков Евгений – Нижний Новгород, гимназия 63,
Воробьев Андрей – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Гарбер Михаил – Ярославль, школа 33,
Глазырин Алексей – Челябинск, лицей 11,
Каленков Максим – Набережные Челны, гимназия 26,
Медвинский Михаил – Санкт-Петербург, ФМЛ 366,
Межиров Илья – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа,
Соколов Сергей – Рыбинск, школа 30,
Сонкина Анна – Калуга, школа 24,
Спиридонов Сергей– Ижевск, Гуманитарно-естественный лицей 41;

по 11 классам –
Дремов Владимир – Волгодонск, школа 24,
Зинин Евгений – Краснодар, гимназия 87,
Исмагилов Ильнур – Саров, лицей 3,
Колесников Андрей – Нижний Новгород, Педагогическая гимназия,
Крамаренко Денис – Краснодар, школа 42,
Поярков Алексей – Рыбинск, лицей 2,
Федотов Алексей – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Фролов Сергей – Нижний Новгород, гимназия 87.

Дипломы III степени

по 9 классам получили
Белокопытов Артем – Санкт-Петербург, ФМЛ 239, 8 кл.,
Ватев Кирилл –Долгопрудный, ФМШ 5,
Волков Юрий – Кемерово, Классический лицей, 8 кл.,
Красильников Павел – Краснодар, школа 2, 8 кл.,
Марков Виктор – Покровск, Покровская школа,
Седов Игорь – Казань, лицей 5,
Смирнов Александр – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Сухов Кирилл – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Телятник Андрей – Долгопрудный, ФМШ 5,
Ширяев Дмитрий – Санкт-Петербург, ФМЛ 239, 8 кл.,
Юдкин Дмитрий – Краснодар, школа 63;

по 10 классам –
Васильев Антон – Санкт-Петербург, гимназия 30,
Гарбер Алексей – Ярославль, школа 33,
Горский Евгений – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа,
Жук Дмитрий – Вологда, ВГЕМЛ,
Игнатенков Егор – Омск, лицей 168,
Клименко Алексей – Москва, Московская государственная Пятьдесят седьмая школа,
Лапшин Виктор – Москва, школа 1303,
Мусатов Даниил – Москва, школа 1543,
Привалов Игорь – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Сафарова Юлия – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Смирнов Филипп – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Столбов Василий – Советск Кировской обл., лицей,
Ульянов Федор – Иваново, лицей 33;

по 11 классам –
Баутин Михаил – Нижний Новгород, ФМШ 40,
Горелов Сергей – Челябинск, ФМЛ 31,
Грибов Александр – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Зильберман Роман – Челябинск, ФМЛ 31,
Исанбаев Павел – Ижевск, Гуманитарно-естественный лицей 41,

Карвонен Максим – Рыбинск, лицей 2,
Кислицын Александр – Саров, гимназия 15,
Куликов Александр – Санкт-Петербург, ФМЛ 239,
Мельников Леонид – Междуреченск, гимназия 20,
Мойкина Татьяна – Ярославль, гимназия 1,
Николаев Андрей – Омск, лицей 64,
Скопенков Михаил – Москва, СУНЦ МГУ,
Шарич Владимир – Москва, СУНЦ МГУ.

Школьники Китая получили 1 диплом I степени, 4 диплома II степени и 1 диплом III степени.

Публикацию подготовил
С.Токарев