Дробно-рациональные уравнения с параметром

С.ЛАВРЕНОВ

В этой статье рассматриваются задачи, довольно часто встречающиеся на вступительных экзаменах. Мы подробно разберем решение нескольких таких задач.

Задача 1. *Решите уравнение*

$$1+\frac{5a-3}{x-a}=\frac{5(2a+1)(1-a)}{(x-a)(x-3a+1)}.$$

Решение. После очевидных выкладок получим, что исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^2+(a-2)x-2a^2-8a=0, \\ x\neq a,\ x\neq 3a-1. \end{cases}$$

Вычислим дискриминант квадратного уравнения:

$$D=(a-2)^2-4\left(-2a^2+8a-8\right)=$$

$$=9a^2-36a+36=9(a-2)^2\geq 0.$$

Итак, при любом значении a квадратное уравнение имеет корни

$$x_1(a)=a-2,\ x_2(a)=4-2a,$$

так что исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=a-2, \\ x=-2a+4, \end{array}\right. \\ x\neq a, \\ x\neq 3a-1. \end{cases} \qquad (1)$$

(Часто абитуриенты записывают в ответ именно эту систему, считая, что этим решение завершено. Но это не так. Можно ли, глядя на эту систему, сразу ответить на вопрос, сколько решений будет при a = 1? Нет.)

Для каждого корня найдем, при каких значениях параметра a он не удовлетворяет уравнению. Для наглядности сведем вычисления в таблицу:

	$x_1=a-2$	$x_2=-2a+4$
$x-a=0$	$a-2-a=0$ решений нет	$-2a+4-a=0$ $a=\frac{4}{3}$
$x-3a+1=0$	$a-2-3a+1=0$ $a=-\frac{1}{2}$	$-2a+4-3a+1=0$ $a=1$

(Многие абитуриенты пишут, что при найденных значениях a уравнение не имеет корней. Это неверно. Например, при a = 1 второй корень нужно отбросить. Но первый корень при этом существует и имеет значение -1. Ведь «запрещенное» значение a = 1 присутствует только во второй колонке нашей таблицы, но не в первой.)

Для «запрещенных» значений a из одной колонки таблицы вычислим значение корня для другой колонки:

$x_1\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{4}{3}-2=\frac{2}{3}$	$x_2\left(-\frac{1}{2}\right)=-2\left(-\frac{1}{2}\right)+4=5$
$x_1(1)=1-2=-1$	

Еще выделим случай, когда оба корня совпадают: $D=0\Leftrightarrow a=2\Rightarrow x=0$.

Ответ: $x_1=a-2$, $x_2=4-2a$ при $a\in\boldsymbol{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2};1;\frac{4}{3};2\right\}$; $x=5$ при $a=-\frac{1}{2}$; $x=-1$ при $a=1$; $x=-\frac{2}{3}$ при $a=\frac{4}{3}$; $x=0$ при $a=2$.

Вот теперь для любого предъявленного нам значения a мы можем сразу указать количество решений и вычислить их прямой подстановкой.

Чтобы лучше понять, как устроены решения системы (1), построим графики для входящих в (1) соотношений на координатной плоскости aOx (рис.1). Самостоятельно разберитесь в геометрической интерпретации решения.

Упражнения

Решите уравнения и дайте решениям геометрическую интерпретацию:

1. $1+\frac{a+1}{x-a}=\frac{2(a-1)(a-2)}{(x-a)(x-a+1)}$. **2.** $3+\frac{2a-3}{(x-2)(x+a)}=\frac{2x+5a}{x+a}$.

3. $7a+3+\frac{2a\left(9a^2-1\right)}{x^2+2x-a^2+2a}=2x+\frac{9a^2+10a+5}{x-a+2}$.

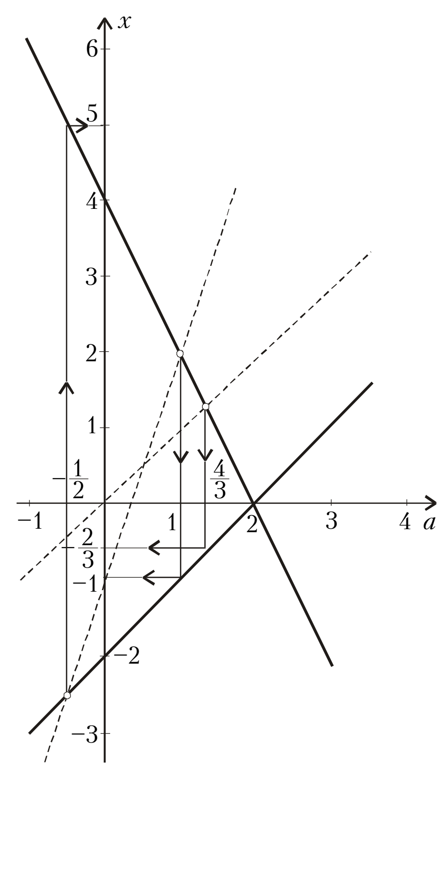

Рис. 1

Теперь разберем еще одну задачу.

Задача 2. *Решите уравнение*

$$\frac{ax+3}{x+4}=\frac{x+6}{ax+1}.$$

Решение. После очевидных преобразований приходим к системе

$$\left(a^2-1\right)x^2+(4a-10)x-21=0,\ x+4\neq 0,\ ax+1\neq 0.$$

При $a^2=1$ уравнение не является квадратным, при $a=-1$ получаем $(-4-10)x-21=0$, т.е. $x=-\frac{3}{2}$, причем $-\frac{3}{2}\neq 4$, $-\frac{3}{2}\neq -1$. Итак, $x=-\frac{3}{2}$ при $a=-1$.

Если $a=1$, аналогично получаем, что $x=-\frac{7}{2}$. Итак, $x=-\frac{7}{2}$ при $a=1$.

Если $a^2-1\neq 0$, т.е. $a\neq\pm 1$, имеем

$$\frac{D}{4}=(2a-5)^2+21\left(a^2-1\right)=(5a-2)^2\geq 0,$$

отсюда

$$x_1(a)=\frac{3a+3}{a^2-1}=\frac{3}{a-1},\ x_2(a)=\frac{-7a+7}{a^2-1}=-\frac{7}{a+1}.$$

Составим таблицу:

	$x_1=\frac{3}{a-1}$	$x_2=-\frac{7}{a+1}$
$x+4=0$	$\frac{3}{a-1}+4=0$, $a=\frac{1}{4}$	$-\frac{7}{a+1}+4=0$, $a=\frac{3}{4}$
$ax+1=0$	$\frac{3a}{a-1}+1=0$, $a=\frac{1}{4}$	$-\frac{7}{a+1}+1=0$, $a=\frac{1}{6}$

Все полученные значения a отличны от ± 1. Вычислим для них значения корней:

$x_1\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{\frac{3}{4}-1}=-12$	$x_2\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{7}{\frac{1}{4}+1}=-\frac{28}{5}$
$x_1\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{3}{\frac{1}{6}-1}=-\frac{18}{5}$	

Оба корня совпадают при $D=0$, т.е. при $a=\frac{2}{5}$, тогда $x=x_1\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{3}{\frac{2}{5}-1}=-5$.

Ответ: $x_1=\frac{3}{a-1}$, $x_2=-\frac{7}{a+1}$ при $a\in\boldsymbol{R}\setminus\left\{-1;\frac{1}{6};\frac{1}{4};\frac{2}{5};\frac{3}{4};1\right\}$; $x=-\frac{3}{2}$ при $a=-1$; $x=-\frac{18}{5}$ при $a=\frac{1}{6}$; $x=-\frac{28}{5}$ при $a=\frac{1}{4}$; $x=-5$ при $a=\frac{2}{5}$; $x=-12$ при $a=\frac{3}{4}$; $x=-\frac{7}{2}$ при $a=1$.

Упражнения

4. Дайте решению задачи 2 геометрическую интерпретацию.

5. Решение задачи 2 немного упростится, если использовать замену $x=1/u$. Испытайте ее.

6. Решите уравнение

$$\frac{ax+8}{x-1}=\frac{x+2}{ax+5}.$$

В следующей задаче корни квадратного уравнения «плохо» выражаются через коэффициенты, что создает некоторые дополнительные трудности.

Задача 3. *Решите уравнение*

$$\frac{x-7}{ax+4}=\frac{ax-2}{x+1}.$$

Решение. Уравнение равносильно системе

$$(x+1)(x-7)=(ax-2)(ax+4), ax+4\neq 0,\ ax+4\neq 0, x\neq -1. \qquad (2)$$

Уравнение системы приводится к виду

$$\left(a^2-1\right)x^2+2(a+3)x-1=0.$$

Пусть сначала $a^2-1=0\Leftrightarrow a=\pm 1$. Как и раньше, получаем, что $x=\frac{1}{4}$ при $a=-1$, $x=\frac{1}{8}$ при $a=1$.

При $a^2\neq 1$ имеем

$$\frac{D}{4}=(a+3)^2+\left(a^2-1\right)=2\left(a^2+3a+4\right)>0,$$

т.е.

$$x_{1,2}=\frac{-(a+3)\pm\sqrt{2a^2+6a+8}}{a^2-1}. \qquad (3)$$

(Катастрофа! Если подставить эти корни в соотношение $ax+4=0$, то после преобразований получим уравнение 4-й степени. К счастью, есть другой метод отбора корней.)

Подставим значения x, не входящие в область определения, в уравнение (2) и определим, решая получившееся уравнение, какие значения параметра a им соответствуют.

Пусть $ax+4=0$. Заметим, что $a\neq 0$ и $x=-\frac{4}{a}$. Подставляя в (2), имеем $\left(-\frac{4}{a}+1\right)\left(-\frac{4}{a}-7\right)=0$.

Если $-\frac{4}{a}+1=0$, то $a=4$; отбросываем корень $x=-1$.

Если $-\frac{4}{a}-7=0$, то $a=-\frac{4}{7}$; отбрасываем корень $x=7$.

Если $x+1=0$, то $x=-1$. Подставляя в (2), получим, что при $a=-2$ и при $a=4$ нужно отбросить корень $x=-1$.

Итак, при $a=-2;\ -\frac{4}{7};\ 4$ один из корней, даваемых формулой (3), будет отброшен, но другой, возможно, будет оставлен. Эти корни можно определить по формуле (3), но проще воспользоваться теоремой Виета, так как один из корней квадратного уравнения – отбрасываемый – нам уже известен: $x_2=\frac{1}{1-a^2}\cdot\frac{1}{x_1}$.

При $a=-2$ получим $x_1=-1$, $x_2=\frac{1}{1-4}\cdot\frac{1}{-1}=\frac{1}{3}$.

При $a=-\frac{4}{7}$ получим $x_1=7$, $x_2=\frac{7}{33}$.

При $a=4$ получим $x_1=-1$, $x_2=\frac{1}{15}$.

Ответ: $x_{1,2}=\frac{-(a+3)\pm\sqrt{2a^2+6a+8}}{a^2-1}$ при $a\in$

$\in \boldsymbol{R} \setminus \left\{-1; \frac{1}{6}; \frac{1}{4}; \frac{2}{5}; \frac{3}{4}; 1\right\}$; $x = \frac{1}{3}$ при $a = -2$; $x = \frac{1}{4}$ при $a = -1$; $x = \frac{7}{33}$ при $a = -\frac{4}{7}$; $x = \frac{1}{8}$ при $a = 1$; $x = \frac{1}{15}$ при $a = 4$.

Прием, использованный при решении задачи 3, очень важен и находит широкое применение в других задачах с параметрами. С его помощью можно решить и первые две задачи (попробуйте!). Попытаемся его осмыслить.

Дано уравнение $f(x,a) = 0$ и ограничение $g(x,a) \neq 0$. Способ, которым мы решили первые две задачи, состоит в следующем. Находим для уравнения $f(x,a) = 0$ корни $x = p_1(a), \ldots, x = p_n(a)$. Решаем уравнения $g(p_i(a),a) = 0$ и находим множество A_i «запрещенных» значений параметра a. Вычисляем значения остальных корней на запрещенных значениях для одного из корней (если только эти значения не являются запрещенными и для других корней). И так перебираем все корни.

А вот способ, которым мы решили задачу 3. Решаем уравнение $g(x,a) = 0$ и находим его корни $x = r_k(a)$. Решаем уравнение $f(r_k(a),a) = 0$ и находим значения a_{km}. Для уравнения $f(x,a_{km}) = 0$ корень $x = r_k(a_{km})$ является запрещенным, так как он обращает в ноль функцию $g(x,a)$. Нужно найти остальные корни уравнения $f(x,a_{km}) = 0$ и выяснить, не являются ли они запрещенными.

Оба способа описаны нами бегло и не слишком точно. Постройте самостоятельно алгоритмические схемы для решения уравнения $f(x,a) = 0$ с ограничениями $g_m(x,a) \neq 0$, где f и g_m – многочлены.

В следующей задаче мы только наметим решение, оставляя заполнение пробелов читателю.

Задача 4. *Решите уравнение*

$$\frac{ax+3}{x+1} = \frac{x+3}{ax+2}$$

Решение. Уравнение равносильно системе

$$\left(a^2-1\right)x^2 + (5a-4)x + 3 = 0,\ x \neq -1,\ x \neq -\frac{2}{a}. \qquad (4)$$

При $a^2 - 1 \neq 0$ находим

$$D = 13a^2 - 40a + 28 = (13a-14)(a-2).$$

При $D < 0$, т.е. $a \in \left(\frac{14}{13}; 2\right)$, решений нет.

Далее, $D = 0$ при $a = \frac{14}{13}$ и при $a = 2$. Если $a = \frac{14}{13}$, то $x = -\frac{13}{3}$; если $a = 2$, то $x = -1$ и решений у исходного уравнения нет.

При $D > 0$ имеем $a \in \left(-\infty; \frac{14}{13}\right) \cup (2; \infty)$ и

$$x_{1,2} = \frac{5a - 4 \pm \sqrt{(a-2)(13a-14)}}{2\left(1-a^2\right)}.$$

Подставляя $x = -\frac{2}{a}$ и $x = -1$ в уравнение (4), выясним, что при $a = 2$; 3 нужно отбросить корень $x = -1$, а при $a = \frac{2}{3}$ – корень $x = -3$. Используя теорему Виета, получаем, что $x = \frac{9}{5}$ при $a = \frac{2}{3}$, при $a = 2$ решений нет, $x = -\frac{3}{8}$ при $a = 3$.

Ответ: $x_{1,2} = \frac{5a - 4 \pm \sqrt{(a-2)(13a-14)}}{2\left(1-a^2\right)}$ при

$$a \in (-\infty; -1) \cup \left(-1; \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; 1\right) \cup \left(1; \frac{14}{13}\right) \cup (2;3) \cup (3;\infty).$$

При $a \in \left(\frac{14}{13}; 2\right)$ решений нет; $x = \frac{1}{3}$ при $a = -1$; $x = \frac{9}{5}$ при $a = \frac{2}{3}$; $x = -3$ при $a = 1$; $x = -\frac{13}{3}$ при $a = \frac{14}{13}$; $x = -\frac{3}{8}$ при $a = 3$.

Упражнение 7. Решите уравнение $\frac{ax+2}{x-5} = \frac{x+1}{ax-1}$.

Задача 5. *Изобразите на координатной плоскости множество точек $M(a,b)$, для которых уравнение*

$$\frac{2a-b+1}{x} - \frac{2a+b-1}{x+2} + \frac{2b}{x+1} = 0$$

имеет единственное решение.

Решение. Исходное уравнение эквивалентно системе

$$x^2 + 2(a+1)x + 2a - b + 1 = 0,\ x \neq -2; -1; 0$$

Рассмотрим случаи, когда уравнение имеет единственное решение.

Первая возможность: $D = 0$, но $x \neq -2$; -1; 0. Тогда $b = -a^2$, $x = -a - 1$. Из графика параболы $b = -a^2$ нужно исключить точки, для которых $-a - 1 = -2$, т.е. $a = 1$; $-a - 1 = -1$, т.е. $a = 0$, и $-a - 1 = 0$, т.е. $a = -1$.

Вторая возможность: квадратное уравнение имеет два корня, но один из них принадлежит области определения системы, а другой нет. Подставим запрещенные корни в квадратное уравнение, получим: если $x = 0$, то $b = 2a + 1$; если $x = -1$, то $b = 0$; если $x = -2$, то $b = -2a + 1$.

Получены уравнения трех прямых, из которых надо исключить точки их пересечения, соответствующие случаю, когда оба корня квадратного уравнения не принадлежат области определения. Это точки $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$, $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ и $(0;1)$.

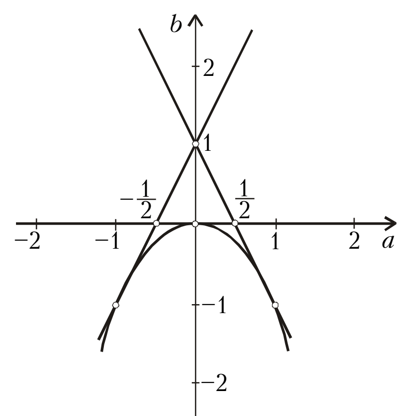

Рис. 2

Ответ изображен на рисунке 2.

Упражнение 8. Изобразите на координатной плоскости множество точек $M(a,b)$, для которых уравнение

$$\frac{a}{x} - \frac{b}{x+1} + \frac{2-b}{x-1} = 0$$

имеет единственное решение.