ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«Квант» для младших школьников

Задачи

(См. «Квант» №4)

1. Так быть не может. Из условия задачи следует, что всех яблок (желтых, зеленых и красных) больше, чем всех яблок (первого, второго и третьего сорта). Противоречие.

2. Построим треугольник AGH такой, что $AH = BG = BC$, и проведем параллельно DE и параллельно GH прямые из вершин B и C; пусть они пересекаются в точке F (рис.1). Тогда $\Delta DAE = \Delta BGF = \Delta CEF = \Delta HAG$, так что $AEFG$ – параллелограмм, BFC – равносторонний треугольник, $\angle MFN = 60°$.

Обозначим $\angle EFM = \angle GFN = \alpha$, тогда $\angle FEA = \angle FGA = \angle EFN = \angle GFM = 60° + \alpha$; $\angle EFG = \angle EAG = 60° + 2\alpha$.

Для суммы углов параллелограмма $AEFG$ имеем

$$2(60° + \alpha + 60° + 2\alpha) = 360°,$$

откуда $\alpha = 20°$.

Следовательно, $\angle BAC = \angle EAG = 100°$.

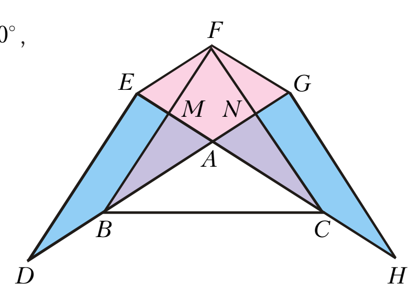

Рис. 1

3. Число X – целое, поскольку сумма чисел в каждой строке таблицы – целое число. Обозначим эту сумму через S. Тогда сумма всех чисел в таблице равна $1 + 2 + \ldots + 8 + X = 3S$, откуда $36 + X = 3S$, следовательно, X делится на 3. Пусть $X = 3k$, где k – целое, тогда $S = 12 + k$. Пусть a, b – два числа, стоящие в одной строке с X. Имеем $3k + a + b = 12 + k$, или $2k + a + b =$

= 12. Следовательно, числа a, b либо одновременно четные, либо нечетные. Рассмотрев все возможные варианты, получаем четыре решения: $X = 0$; 3; 6; 9. Заполнение таблицы для каждого из этих четырех вариантов показано на рисунке 2.

$X = 0$:

4	8	0
6	1	5
2	3	7

$X = 3$:

1	7	5
8	3	2
4	3	6

$X = 6$:

1	8	5
6	2	6
7	4	3

$X = 9$:

2	4	9
6	8	1
7	3	5

Рис. 2

4. Не могут. Пусть середины ребер (их 12) – белые точки, а вершины куба и центры его граней (их 14) – черные точки (рис.3). Каждое звено ломаной имеет один черный конец, а другой – белый. Значит, на замкнутой ломаной должно быть равное количество как черных, так и белых точек.

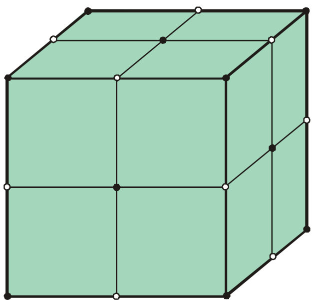

Рис. 3

5. Так как Пончик съедает за минуту 4 или 5 пирожков, то через 10 минут после старта он съел не менее $4 \times 10 = 40$ и не более $5 \times 10 = 50$ пирожков. Сиропчик выпил на 20% больше стаканов, т.е. $6/5$ количества съеденных Пончиком пирожков. Отсюда следует, что число этих пирожков делится на 5 и потому равно 40, 45 или 50. Заметим, что 20% этого количества равно, соответственно, 8, 9 или 10 – именно на столько *условных единиц* (т.е. пирожков либо стаканов) Сиропчик опережал Пончика через 10 минут после начала состязания. По условию, Пончик сумел за 4 минуты сравнять счет. Так как он в минуту съедает не более 5 пирожков, а Сиропчик выпивает не менее 3 стаканов, то за минуту Пончик может уменьшить отставание не более чем на $5 - 3 = 2$ *у.е.* Поэтому за 4 минуты он способен уменьшить разницу не более чем на $2 \times 4 = 8$ *у.е.* (но уж никак не на 9 или 10). Поэтому однозначно можно сделать вывод: к исходу 10-й минуты Пончик съел 40 пирожков, а Сиропчик выпил 48 стаканов. За 4 последующие минуты Пончик съел еще $5 \times 4 = 20$ пирожков, а Сиропчик выпил еще $3 \times 4 = 12$ стаканов, и, таким образом, к концу 14-й минуты у них набралось по 60 *у.е.* За следующие 6 минут Пончик съел не менее $4 \times 6 = 24$ и не более $5 \times 6 = 30$ пирожков, т.е. всего к исходу 20-й минуты он поглотил от $60 + 24 = 84$ до $60 + 30 = 90$ пирожков. Сиропчик к тому моменту отстал на 10%, т.е. количество выпитых им стаканов составляло $9/10$ этого количества. Следовательно, число съеденных Пончиком к концу 20-й минуты пирожков должно делиться на 10. Среди натуральных чисел от 84 до 90 лишь одно – 90 – делится на 10. Поэтому Пончик съел к исходу 20-й минуты именно 90 пирожков, а Сиропчик выпил $90 \times (9/10) = 81$ стакан (нетрудно убедиться, что это возможно: например, если в течение пяти из упомянутых шести минут он выпивал по 3 стакана, а за шестую минуту – 6). За оставшиеся 5 минут Сиропчик, по условию, вырвал-таки победу. Так как за минуту он выпивает не более 6 стаканов, то за 5 минут – не более $6 \times 5 = 30$. Пончик же за минуту съедает не менее 4 пирожков, т.е. за 5 минут – не менее $4 \times 5 = 20$. Поэтому к концу битвы Пончик съел *не менее* $90 + 20 = 110$ пирожков, а Сиропчик выпил *не более* $81 + 30 = 111$ стаканов. А поскольку Сиропчик победил, то *именно так все и было!* (В самом деле, любое «шевеление» приведет либо к ничьей, либо к победе Пончика).

Калейдоскоп «Кванта»

Вопросы и задачи

1. Индукция магнитного поля Земли имеет вертикальную составляющую. Северный полюс будет находиться на нижнем конце прута, южный – на верхнем (в северном полушарии).
2. Нет, так как влияние внешних магнитных полей, сотрясения и резкие изменения температуры способствуют размагничиванию постоянных магнитов.
3. В достаточно сильном магнитном поле можно намагнитить ферромагнетик любой формы.
4. По мере нагревания стали (приближения к точке Кюри) ее магнитная проницаемость уменьшается, сталь плохо намагничивается и очень слабо притягивается электромагнитом.
5. От центрального электрода к кольцу потечет ток. На движущиеся в растворе ионы со стороны магнитного поля будет действовать сила, приводящая жидкость во вращение по часовой стрелке (если смотреть сверху).
6. Свободные электроны металла, движущиеся в магнитном поле, под действием силы Лоренца смещаются к одной из боковых плоскостей пластины. В направлении, поперечном движению пластины, возникает электрическое поле (эффект Холла).
7. В отличие от электрических силовых линий, линии магнитной индукции не обрываются на поверхности экрана, поэтому магнитное поле можно лишь ослабить, и то при достаточно толстых стенках оболочки.
8. Качающаяся стрелка создает переменное магнитное поле, индуцирующее в латунном корпусе вихревые токи, препятствующие движению стрелки.
9. Чтобы уменьшить индукционные токи Фуко.
10. Индуктивность зависит от магнитной проницаемости сердечника, которая при различной силе тока в катушке, а значит и при различной величине магнитного поля в сердечнике, неодинакова.
11. а) Увеличится во много раз; б) немного увеличится; в) немного уменьшится.
12. Парамагнитные жидкости втягиваются в область более сильного поля, а диамагнитные выталкиваются из нее.
13. Газы, образующиеся при горении (углекислый и угарный газы), обладают свойствами диамагнетиков.
14. а) Произойдет поляризация; б) возникнет кратковременный индукционный ток; в) появится длительный индукционный ток.
15. Магнитный поток, пронизывающий сверхпроводящий контур, не может измениться. Поскольку площадь контура уменьшилась в 4 раза, во столько же раз увеличится индукция магнитного поля.

Микроопыт

В пламени (нагреваясь) железный гвоздь теряет свои магнитные свойства, а в воздухе (охлаждаясь) восстанавливает их.

Жеребьевка для чемпиона

А. Занумеруем игроков следующим образом. В начало списка поставим тех, кто победил чемпиона («опасных»). Далее – проигравших ему («неопасных»). Последний номер дадим чемпиону. В каждом туре розыгрыша кубка составим пары по порядку номеров.

Чемпион выступил не хуже «среднестатистического» участника, который выиграл столько же, сколько и проиграл. Значит, число «опасных» не больше числа «неопасных». Все «опасные» попадут в первую половину списка, тогда как чемпион – во вторую. Поэтому чемпион не встретится с «опасным» игроком раньше финала, что и требовалось.

Б. «Опасными» мы называем тех, кто выигрывает у чемпиона, а «неопасными» – тех, кто ему проигрывает. Каждый из «опасных» проиграл в чемпионате кому-то из «неопасных» (иначе он бы выиграл больше матчей, чем чемпион, что невозможно). Составим первую пару розыгрыша кубка из «опасного» и такого «неопасного», которому он проиграл. Следующие пары составляем таким же образом, пока это возможно. Допустим, остались «опасные», которых нельзя включить в такие пары (они проиграли в чемпионате тем «неопасным», которые уже вошли в предыдущие пары). Тогда пусть эти «опасные» играют между собой. Если один из них останется без пары, то поступим следующим образом. Общее число «опасных» не больше числа «неопасных» (поскольку чемпион выступил не хуже «среднестатистического» игрока, который выиграл и проиграл поровну). В составленных парах не больше «неопасных» игроков, чем «опасных», и еще один «опасный» остался без пары. Значит, кто-то из «неопасных» не был еще включен в пару – пусть с ним и играет оставшийся «опасный».

Остальные игроки объединяются в пары произвольно. Чемпион выйдет в следующий тур, поскольку играет с «неопасным». Если в остальных турах пары строятся по тому же правилу, то чемпион получит кубок. Это заведомо возможно, если в каждом туре «опасные» составляют менее половины участников. Допустим, что вплоть до некоторого тура проведена описанная процедура и это условие выполнялось. Покажем, что и после очередного тура такой процедуры оно будет выполнено.

Поскольку в следующий тур выходит половина участников предыдущего, то достаточно показать, что отсеивается не меньше половины «опасных». Но в матчах между ними выбывает каждый второй участник. Только один «опасный» может выиграть у «неопасного». Поэтому достаточно, чтобы в том же туре хотя бы один «опасный» проиграл «неопасному». Как мы видели, в первом туре это выполнено. В последующие туры при описанной жеребьевке выходили только такие «опасные», которые проигрывают кому-то из «неопасных», также вышедших в этот тур. И первая же пара составлялась из «опасного» и такого «неопасного», которому он проигрывает. Этим и доказан искомый факт.

В. Добавим к «настоящим» игрокам некоторое количество «статистов», чтобы общее число участников стало степенью двойки. Пусть эти «статисты» проигрывают всем остальным участникам, а между собой играют как угодно. Очевидно, чемпион останется чемпионом, и можно использовать жеребьевки из пунктов А и Б. При этом можно обеспечить, чтобы «статисты» все время играли между собой – кроме одного, если в данном туре их число нечетно (тогда нечетно и число «настоящих» игроков). Удалим теперь «статистов», и пусть «настоящий» игрок, встречавшийся со «статистом» в каком-то туре, пропускает этот тур и выходит в следующий. Мы получим искомую жеребьевку.

Дробно-рациональные уравнения с параметром

1. $x_1 = 2a-3$, $x_2 = 1-a$ при $a \in \boldsymbol{R} \setminus \left\{\frac12; 1; \frac43; 2; 3\right\}$; $x=-2$ при $a \in \left\{\frac12; 3\right\}$; $x=-1$ при $a \in \{1; 2\}$; $x = -\frac13$ при $a = \frac43$.

2. $x_1 = 2a-1$, $x_2 = 3$ при $a \in \boldsymbol{R} \setminus \left\{-3; \frac13; \frac32; 2\right\}$; $x=-7$ при $a=-3$; $x=3$ при $a \in \left\{\frac13; \frac32; 2\right\}$.

3. $x_1 = a$, $x_2 = 2a-1$, $x_3 = (a+1)/2$ при $a \in \boldsymbol{R} \setminus \left\{-1; -\frac13; 0; \frac13; 1; 5\right\}$; $x_1=-1$, $x_2=0$ при $a=-1$; $x_1 = -\frac53$, $x_2 = -\frac13$ при $a = -\frac13$; $x_1=-1$, $x_2 = \frac12$ при $a=0$; $x_1 = \frac13$, $x_2 = \frac23$ при $a = \frac13$; $x=1$ при $a=1$; $x_1=5$, $x_2=9$ при $a=5$.

6. $x_1 = -\frac{7}{a+1}$, $x_2 = \frac{6}{1-a}$ при $a \in \boldsymbol{R} \setminus \left\{-8; -5; -1; \frac17; 1; \frac52; 13\right\}$; $x = \frac23$ при $a=-8$; $x = \frac74$ при $a=-5$; $x=3$ при $a=-1$; $x=-\frac72$ при $a=1$; $x=-4$ при $a = \frac52$; $x = -\frac12$ при $a=13$.

7. При $a \in \left(-\infty; -\frac{14}{11}\right) \cup \{-1\} \cup (2; +\infty)$ решений нет; $x_{1,2} = \frac{a+4 \pm \sqrt{-(a-2)(11a+14)}}{2\left(1-a^2\right)}$ при $a \in \left(-\frac25; \frac15\right) \cup \left(\frac15; 1\right) \cup (1; 2)$;

$x = -\frac{11}{5}$ при $a = -\frac{14}{11}$;

$x = -\frac57$ при $a = -\frac25$; $x = -\frac58$ при $a = \frac15$; $x = -\frac35$ при $a=1$; $x=-1$ при $a=2$.

8. К случаям, рассмотренным в задаче 5 статьи, добавляется случай равенства нулю коэффициента перед x^2. Ответ показан на рисунке 4.

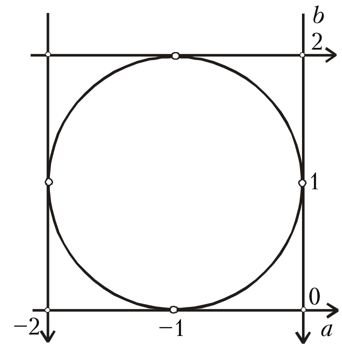

Рис. 4

Конденсаторы в цепях постоянного тока

1. $Q = \frac{C\mathcal{E}^2}{2}\left(\frac{R_2}{R_1+R_2}\right)^2$.

2. 1) $\mathcal{E} = 4U_1/3 = 16$ В; 2) $U_2 = 5\mathcal{E}/16 = 5$ В.

3. 1) $I_2 = \mathcal{E}/R_2 = 1{,}5$ А;

2) $I_6 = \mathcal{E}\left(R_1+R_2\right)/\left(R_1R_2\right) - I_3R_3/R_2 = 4{,}05$ А.

4. 1) $I_{0б} = \mathcal{E}/r$; 2) $Q = \left(C_1+C_2+C_3\right)\mathcal{E}^2/2$.

XXVI Всероссийская олимпиада школьников по математике

Заключительный этап

9 класс

1. *Ответ*: $a+b+c=-3$. *Указание.* Пусть x_1 – общий корень первой пары уравнений, а x_2 – общий корень второй пары уравнений. Докажите, что $x_1x_2=1$, а потому x_2 – общий корень уравнений $x^2+x+a=0$ и $x^2+ax+1=0$.

2. Сначала Саша узнает НОД чисел $X+1$ и 2 и тем самым определяет четность числа X. Если X четно, то второй вопрос будет о НОД$(X+2, 4)$, а если нечетно, то о НОД$(X+1, 4)$, после чего Саша узнает остаток от деления X на 4. Вообще, если после k вопросов ($k \le 5$) Саша определит остаток r_k от деления X на 2^k, то следующим $(k+1)$-м вопросом он узнает $A = $ НОД$\left(X+2^k-r_k, 2^{k+1}\right)$, а затем найдет и остаток от деления X на 2^{k+1}: если $A = 2^{k+1}$, то $r_{k+1} = 2^k + r_k$, если же $A = 2^k$, то $r_{k+1} = r_k$.

Таким образом, задав 6 вопросов, Саша узнает остаток от деления X на 64. Ясно, что чисел с таким остатком при делении на 64 в пределах первой сотни не более 2. Если их все же два, скажем a и $a + 64$, то Саша может спросить, чему равен наибольший общий делитель $X + 3 - r$ и 3, где r – остаток от деления a на 3. Ясно, что если $X = a$, то ответ: 3, а если $X = a + 64$, то 1. Итак, седьмым вопросом число X определится однозначно.

Замечание. Можно заметить, что первые шесть вопросов Саша употребил на отыскание последних шести цифр двоичной записи числа X.

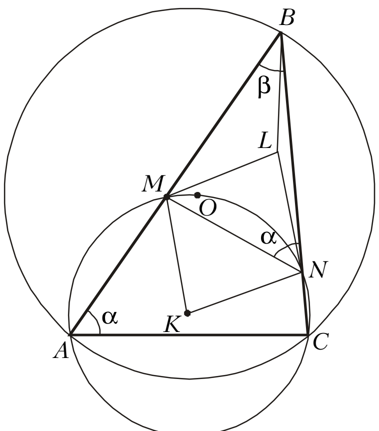

Рис. 5

3. Пусть $\angle ABC = \beta$, $\angle BAC = \alpha$ (рис.5). Тогда $\angle AOC = 2\beta$. Поэтому дуга AC окружности с центром K, не содержащая точек M и N, равна 4β. Далее, $\angle ABC = \frac{1}{2}\left(\overset{\smile}{AC} - \overset{\smile}{MN}\right)$, что дает $\beta = \frac{1}{2}\left(4\beta - \overset{\smile}{MN}\right)$. Тогда $\overset{\smile}{MN} = 2\beta$ и $\angle MKN = 2\beta$ (центральный угол). Из симметрии относительно MN получаем $\angle MLN = 2\beta$, $ML = LN$. Из этих равенств следует, что L – центр описанной окружности ΔMBN.

Так как $AMNC$ – вписанный четырехугольник, то $\angle BNM = \angle BAC = \alpha$. Для окружности, описанной около ΔMBN, $\angle BLN$ – центральный, поэтому $\angle BLM = 2\alpha$. Из ΔMBL получаем $\angle MBL = \angle BML = \frac{\pi - 2\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Поскольку $\angle ABL + \angle BAC = \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \alpha = \frac{\pi}{2}$, то $BL \perp AC$.

4. Для решения этой задачи удобно прибегнуть к языку теории графов (города – вершины графа, дороги — ребра, степень вершины – количество дорог, выходящих из города, цикл – замкнутый маршрут).

Предположим, что существует граф, степени всех вершин которого более двух, но длина любого цикла в этом графе делится на 3. Рассмотрим такой граф G с наименьшим числом вершин. Очевидно, в этом графе существует цикл Z; пусть этот цикл последовательно проходит по вершинам A_1, A_2, …, A_{3k}. Пусть существует путь S, соединяющий вершины A_m и A_n и не проходящий по ребрам цикла Z. Рассмотрим циклы Z_1 и Z_2, состоящие из пути S и двух «половинок» цикла Z. Поскольку длины обоих этих циклов делятся на 3, нетрудно заметить, что длина пути S делится на 3. В частности, из доказанного утверждения следует, что никакая вершина X, не входящая в цикл Z, не может быть соединена ребрами с двумя разными вершинами цикла Z. Кроме того, ребра, выходящие из вершин цикла Z, отличные от ребер этого цикла, все различны.

Объединим все вершины A_1, A_2, …, A_{3k} цикла Z в одну вершину A, которую соединим ребрами со всеми вершинами, соединеными с вершинами цикла Z. Очевидно, в полученном графе G_1 меньше вершин, чем в графе G, и степень каждой вершины по-прежнему более двух. Из доказанного выше следует, что длина любого цикла в графе G_1 делится на 3. Мы получили противоречие: ведь в выбранном ранее графе G было минимальное количество вершин среди всех таких графов.

Таким образом, в любом графе, степени всех вершин которого более двух, существует цикл, длина которого не делится на 3. Остается лишь применить это утверждение для графа, вершины которого соответствуют городам, а ребра – дорогам.

5. *Указание.* Докажите по индукции, что при $n = 5m$ все числа от 1 до n окажутся выписанными. Для этого запишите первые 5 членов последовательности, а затем убедитесь, что $a_{5m} = 5m - 2$, а следующие 5 чисел имеют вид: $5m + 1$, $5m + 4$, $5m + 2$, $5m + 5$, $5m + 3$. Далее воспользуйтесь тем, что квадраты натуральных чисел дают при делении на 5 остатки 0, 1 и 4.

7. Пусть окружность S_1 вторично пересекает CD в точке F (рис.6). Будем считать для определенности, что E лежит между D и F (возможно, $F = E$). Из равенства $DA^2 = DF \cdot DE$ следует $DB^2 = DF \cdot DE$, а значит, и окружность S_2 проходит через точку F. Теперь, поскольку $CA \cdot CM = CE \cdot CF = CB \cdot CN$, получаем $\frac{CM}{CN} = \frac{CB}{CA}$, откуда $\Delta CMN \sim \Delta CBA$, $\angle CMN = \angle CBA$, $\angle CNM = \angle CAB$. Проведем касательную к S_1 в точке M и отметим на ней две точки P и Q так, чтобы P оказалось по одну сторону с B от прямой AC, а Q – по другую. Очевидно, $\angle PMA = \angle BAM$. Но тогда

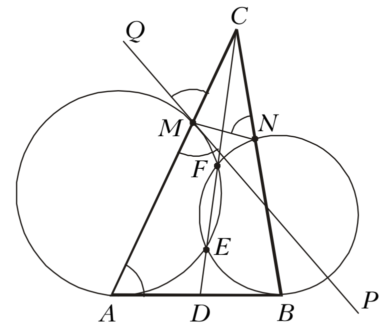

Рис. 6

$\angle QMC = \angle PMA = \angle CAB = \angle CNM$, а это означает, что окружность, проходящая через C и M и касающаяся S_1, проходит и через N. Аналогично показывается, что окружность, проходящая через C и N и касающаяся S_2, проходит и через M.

8. Положим для удобства изложения $a_{n+100} = a_n$ при $n = 1, 2, \ldots, 100$. Через (a, b) будем обозначать наибольший общий делитель чисел a и b.

Лемма. *Пусть a_1, a_2, …, a_n и d – натуральные числа. Тогда существует натуральное число k такое, что $(a_1 + kd, a_i) \le d$ для любого $i = 2, 3, \ldots, n$.*

Доказательство леммы. Существует некоторое число, кратное $a_2 a_3 \ldots a_n$, скажем $l a_2 a_3 \ldots a_n$, которое больше a_1. Тогда среди тех k, для которых $a_1 + kd > l a_2 a_3 \ldots a_n$, существует наименьшее число k_0. Положим $a_1' = a_1 + k_0 d$. Тогда $0 < a_1' - l a_2 a_3 \ldots a_n \le d$, и наибольший общий делитель a_1' и каждого из a_i не превосходит d. Лемма доказана.

Пусть теперь M – наибольший из попарных общих делителей чисел a_i. Докажем, что с помощью операций, описанных в условии, мы сможем заменить исходный набор чисел на набор, в котором все попарные общие делители меньше M. Действительно, так как числа a_1, a_2, …, a_{100} взаимно просты в совокупности, найдутся два соседних числа a_i и a_{i+1}, первое из которых делится на M, а второе – нет. Тогда $d = (a_i, a_{i+1}) < M$. Применяя лемму, прибавим к a_i такое кратное d, чтобы наибольшие общие делители a_i' с каждым из остальных чисел стали не больше d. В полученном наборе по-прежнему все попарные наибольшие делители не превосходят M, а чисел, кратных M, меньше, чем в исходном. Повторяя при необходимости эту операцию, мы добьемся, что останется ровно одно число, кратное M, и тогда, очевидно, все попарные наибольшие общие делители станут меньше M.

Итак, если наибольший из попарных общих делителей чисел набора больше 1, его можно уменьшить. Поэтому его можно уменьшить до 1, что и требуется условием.

10 класс

2. Пусть $t_i = x_i^{13} - x_i$. При $-1 < x_i \le 0$ имеем $t_i \ge 0$; если же $0 < x_i < 1$, то $t_i < 0$. Неравенство, которое нужно доказать, перепишем в виде $\sum_{i=1}^{n} t_i y_i < 0$. Без ограничения общности

можно считать, что $y_1 > 0$ (поскольку $\sum\left(y_i+c\right)t_i =$
$= \sum y_i t_i + c\sum t_i = \sum y_i t_i$).
Пусть число k таково, что $x_k \le 0$, $x_{k+1} > 0$. Тогда t_1, …
…, $t_k \ge 0$, t_{k+1}, …, $t_n < 0$. Оценим сумму $\sum t_i y_i$ следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n} t_i y_i = \sum_{i=1}^{k} t_i y_i + \sum_{j=k+1}^{n} t_j y_j \le$$
$$\le y_k \sum_{i=1}^{k} t_i + y_{k+1} \sum_{j=k+1}^{n} t_j < y_{k+1} \sum_{i=1}^{n} t_i = 0.$$

Неравенство доказано.

3. Пусть H – ортоцентр ΔABC, а M – середина стороны AC (рис.7). Выберем на отрезках AH и CH точки S и T такие, что $PS \perp AB$ и $TQ \perp BC$. Обозначим через K точку пересечения перпендикуляров PS и QT. Поскольку $\angle BPK = \angle BQK =$ $= 90°$, то четырехугольник $BPKQ$ вписанный. Покажем, что точки K и R совпадают. Треугольник PBQ равнобедренный ($BP =$ $= BQ$), ибо $\angle HPB =$ $= \angle HQB$. Поэтому точка K лежит на биссектрисе угла B. Докажем, что она также лежит и на прямой HM. Действительно, треугольники PHC_1 и QHA_1 подобны по двум углам, поэтому $\dfrac{PH}{HQ} = \dfrac{C_1H}{HA_1}$. Аналогично, ΔAHC_1 подобен ΔCHA_1, откуда $\dfrac{C_1H}{HA_1} = \dfrac{AH}{HC}$. Далее, $\dfrac{PH}{HQ} =$ $= \dfrac{HS}{HT}$, ибо $\Delta PHS \sim \Delta THQ$. Следовательно,

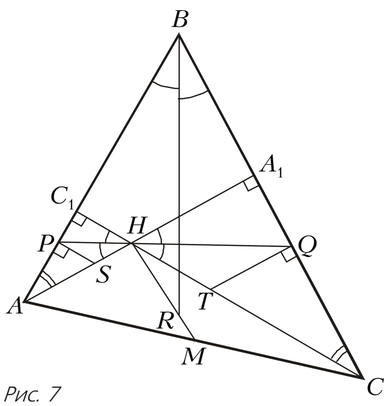

Рис. 7

$$\frac{HS}{HT} = \frac{PH}{HQ} = \frac{C_1H}{HA_1} = \frac{AH}{HC},$$

откуда $ST \| AC$. Поэтому середина отрезка ST лежит на прямой HM. Поскольку $HSKT$ – параллелограмм, точка K лежит на прямой HM. Отсюда точка K является точкой пересечения прямой MH с биссектрисой угла B. Таким образом, точки K и R совпадают.

4. *Ответ*: нельзя (при любой последовательности из девяти задаваемых вопросов найдется последовательность ответов, которой удовлетворяют по крайней мере два варианта упорядочивания масс гирь).

5. *Ответ:* 7. *Пример*: {–3, –2, –1, 0, 1, 2, 3}.

6. Предположим, что совершенное число равно $3n$, где n не кратно 3. Тогда все натуральные делители числа $3n$ (включая его само) можно разбить на пары d и $3d$, где d не делится на 3. Следовательно, сумма всех делителей числа $3n$ (она равна $6n$) делится на 4. Отсюда n кратно 2. Далее заметим, что числа $\dfrac{3n}{2}$, n, $\dfrac{n}{2}$ и 1 будут различными делителями числа $3n$, их сумма равна $3n + 1 > 3n$, откуда следует, что число $3n$ не может быть совершенным. Противоречие.

7. Пусть точки Q и B_1 лежат по разные стороны от прямой BK, а точки P и B_1 лежат по разные стороны от прямой BM (остальные случаи рассматриваются аналогично). Прямые QK и PM (рис.8) пересекаются в точке N, так как точки Q и P являются образами точек K и M при гомотетии с центром N (касательная переходит в параллельную ей касательную с точкой касания в середине дуги). Значит, $\angle NQB + \angle NPB = \pi$. Кроме того, $\angle KB_1B +$ $+ \angle KQB = \pi$ и $\angle MB_1B + \angle MPB =$ $= \pi$. Следовательно, $\angle KB_1B + \angle MB_1B =$ $= \pi$, т. е. точка B_1 лежит на прямой KM. Далее, $\angle BQB_1 =$ $= \angle BKB_1 = \angle KNM = \angle B_1MB = \angle B_1PB$. А поскольку $\angle QBP +$ $+ \angle QNP = \pi$, то получаем, что в четырехугольнике BPB_1Q два противоположных угла равны, а сумма двух смежных равна π, следовательно, BPB_1Q – параллелограмм.

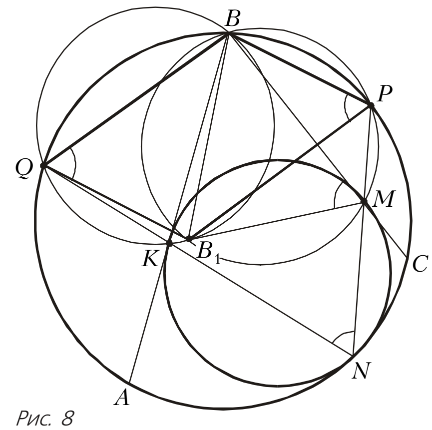

Рис. 8

11 класс

1. При $x = y = -z$ получаем $f(2x) \ge f(0)$.
С другой стороны, при $x = z = -y$ получаем, что $f(2x) \le f(0)$. Итак, $f(0) \ge f(2x) \ge f(0)$, т.е. $f(2x) \equiv \text{const} = C$. Функция $f(x) \equiv C$ при любом C удовлетворяет неравенству.

2. Предъявим такое разбиение. Выделим в i-е множество ($1 \le i \le 99$) все четные числа, дающие при делении на 99 остаток $i - 1$, а в сотое множество – все нечетные числа. Очевидно, что среди любых чисел a, b и c, удовлетворяющих уравнению $a + 99b = c$, четное количество нечетных. Если среди них два нечетных, то они из одного (сотого) множества, иначе a и c из одного множества, так как они четные и дают одинаковые остатки от деления на 99.

3. Будем говорить «в» вместо «внутри или на границе». Предположим противное. Рассмотрим пятиугольник минимальной площади S, для которого не выполняется утверждение задачи (так как площадь любого пятиугольника с вершинами в целых точках – число полуцелое, то такой найдется). Покажем, что все целые точки в треугольнике AC_1D_1, кроме A, лежат на C_1D_1. В самом деле, если в нем есть другая целая точка K, то площадь выпуклого пятиугольника $KBCDE$ меньше S, а его «внутренний» пятиугольник лежит в пятиугольнике $A_1B_1C_1D_1E_1$, что, очевидно, невозможно.
Выберем из ABC, BCD, CDE, DEA и EAB треугольник наименьшей площади. Пусть это ABC. Тогда точка A лежит не дальше от прямой BC, чем D; точка C лежит не дальше от прямой AB, чем E. Рассмотрим точку O такую, что $ABCO$ – параллелограмм (очевидно, эта точка целая). Нетрудно показать, что точка O лежит в треугольнике AB_1C. Тогда из доказанного в предыдущем абзаце следует, что она лежит в пятиугольнике $A_1B_1C_1D_1E_1$, чего не может быть. Противоречие.

4. Пусть $b_i = a_1 + \ldots + a_i$. Ясно, что $b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_n$. Тогда

$$\frac{a_{l+1} + a_{l+2} + \ldots + a_k}{k-l} = \frac{b_k - b_l}{k-l}.$$

Рассмотрим на координатной плоскости точки $B_0(0, 0)$, $B_1(1, b_1)$, $B_2(2, b_2)$, …, $B_n(n, b_n)$. Тогда отношение $\dfrac{b_k - b_l}{k-l}$ будет равно тангенсу угла наклона прямой B_lB_k. Значит, условие $m_k > \alpha$ будет равносильно тому, что прямая, проходящая через B_k с углом наклона $\operatorname{arctg}\alpha$ (эту прямую назовем l_k), будет проходить выше хотя бы одной из точек B_l при $l < k$ (такую точку B_k будем называть *хорошей*). Выражение $\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{\alpha}$ будет равно b_n/α, и это будет расстояние между точкой $(0, n)$ и точкой пересечения l_n с осью абсцисс. Докажем индукцией по количеству точек n, что это расстояние больше числа хороших точек. База очевидна. Если точка B_n не хорошая, то выбросим ее, при этом число хороших точек не изменится, а отрезок уменьшится (так как $b_{n-1} \le b_n$). Если же она хорошая, то пусть B_k – ближайшая (по оси абсцисс) точка, лежащая под l_n. Тогда выбросим все точки от B_{k+1} до B_n (они все хорошие), количество хороших точек уменьшится на $n - k$, а отрезок – больше чем на $n - k$.

5. Доказываемое неравенство можно переписать в виде

$$\sin^{2n} x + \left(2^n - 2\right)\sin^n x \cos^n x + \cos^{2n} x \le \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^n$$

При $\cos x \sin x = 0$ неравенство справедливо. Если $\cos x \sin x \ne 0$, оно с помощью замены $t = \mathrm{tg}^2 x$ сводится к неравенству

$$\left(t + \frac{1}{t}\right)^n \ge t^n + \frac{1}{t^n} + 2^n - 2,$$

справедливому при всех $t > 0$. Это неравенство легко доказывается по индукции.

6. Решение аналогично решению задачи 6 для 10 класса.

7. Пусть для определенности O лежит на продолжении отрезка AB за точку B (рис.9). Обозначим через P, Q точки пересечения KL с окружностью ω, через M, N – точки касания сторон BC и AD с ω. Проведем касательные l_1, l_2 к ω в точках P, Q. Обозначим через α угол между касательной l_1 (или l_2) и хордой PQ.

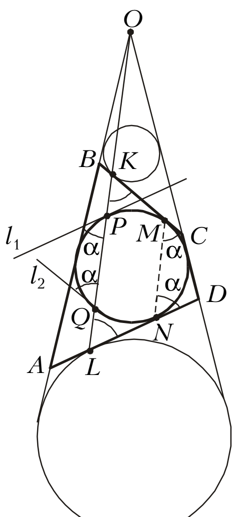

Рис. 9

При гомотетии с центром O, переводящей окружность ω_1 в ω, касательная BC в точке K перейдет в l_2; при гомотетии, переводящей окружность ω_2 в ω, прямая AD перейдет в l_1. Отсюда $BC \| l_2$, $AD \| l_1$ и, следовательно, $\angle LKC = \angle KLD = \alpha$. Кроме того, $\angle BMN = \angle ANM$, как углы между касательной и хордой. Отсюда получаем, что четырехугольник $KLNM$ – равнобокая трапеция и $\angle NMC = \angle MND = \alpha$. Итак, хорды PQ и MN параллельны и стягивают равные дуги величиной 2α. Отсюда следует, что средняя линия этой трапеции проходит через центр ω. Но середина KM совпадает с серединой BC (точки касания стороны треугольника со вписанной и вневписанной окружностями, как известно, симметричны относительно середины стороны), и середина LN совпадает с серединой AD.

8. Предположим противное: пусть среди четырех клеток на пересечении любых двух строк и любых двух столбцов есть две клетки одинакового цвета. Для удобства будем нумеровать цвета числами от 1 до 4. Назовем *парой* две клетки разного цвета, лежащие в одном столбце. Назовем *совпадением* две клетки одинакового цвета, лежащие в одном столбце или в одной строке. Разделим пары на 6 типов по цветам входящих в них клеток: {1,2}, {1,3}, {1,4}, {2,3}, {2,4}, {3,4}. Рассмотрим две произвольные строчки. Докажем, что в этих двух строчках всего не менее 25 совпадений. Из сделанного предположения следует, что любые две пары с клетками в этих строчках должны иметь общий цвет. Нетрудно заметить, что возможны два принципиально различных случая: все пары содержат цвет 1 или есть пары типов {1,2}, {1,3} и {2,3}. Рассмотрим эти два случая.

Если все пары в наших двух строчках содержат клетку цвета 1, то всего пар не более чем клеток цвета 1 в обеих строчках, т.е. не более 50. Значит, в рассматриваемых двух строчках не менее 50 совпадений.

Пусть есть пары типов {1,2}, {1,3} и {2,3}.В этом случае все клетки цвета 4 в наших строчках совпадают, и таким образом есть не менее 25 совпадений.

Итак, мы доказали, что в любой паре строчек не менее 25 совпадений, аналогичный результат верен и для любой пары столбцов. Таким образом, всего в нашем квадрате есть не менее $2 \cdot \frac{99 \cdot 100}{2} \cdot 25 = 25 \cdot 99 \cdot 100$ пар клеток одинакового цвета, лежащих в одной строке или в одном столбце. Но так как в любой строке и в любом столбце по 25 клеток каждого цвета, количество пар клеток одного цвета, лежащих в одном столбце или в одной строке, равно $200 \cdot \frac{25 \cdot 24}{2} \cdot 4 = 24 \cdot 100^2$. Учитывая, что $25 \cdot 99 > 24 \cdot 100$, мы приходим к противоречию.

XXXIV Всероссийская олимпиада школьников по физике

Теоретический тур

9 класс

1. $\omega^+ = A(l + \mu h)$, $\omega^- = A(l - \mu h)$, где $A = 2P/(RMgL\mu)$; в случае вращения против часовой стрелки при $l \le \mu h$ происходит заклинивание.

2. Решение этой задачи будет опубликовано в «Задачнике «Кванта».

3. $\lambda_2 = \lambda_1 - (c_1 - c_2)(t_0 - t_1) = 3{,}12 \cdot 10^5$ Дж/кг.

4. $U_{13} = 3{,}75$ В, $U_{23} = 11{,}25$ В; резисторы могут быть соединены «треугольником» или «звездой»; в первом случае сопротивления резисторов равны R, $2R$ и $3R$, а во втором – R, $3R/2$ и $3R$.

10 класс

1. 1) $v_m \approx 2{,}1$ м/с; 2) при $v_0 > 0{,}38$ м/с, $\Delta = 3{,}5$ м/с.

2. Решение этой задачи будет опубликовано в «Задачнике «Кванта».

3. $t_{уст} \approx 65$ °С, $\alpha_{уст} \approx 0{,}35$. **4.** $Q = (2{,}0 \pm 0{,}2)p_0V_0$.

5. 1) $I_1 = I_2 = \left(\mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_1/2\right)/R$; 2) $\Delta W = C\left(\mathcal{E}_1 + 2\mathcal{E}_2\right)^2/4$;

3) $A_1 = C\mathcal{E}_1\left(\mathcal{E}_1 + 2\mathcal{E}_2\right)/2$, $A_2 = C\mathcal{E}_2\left(\mathcal{E}_1 + 2\mathcal{E}_2\right)$;

4) $Q = C\left(\mathcal{E}_1 + 2\mathcal{E}_2\right)^2/4$.

11 класс

1. $\Omega = 1{,}72$ с$^{-1}$, $A_2 = 0{,}29$ м.

2. Решение этой задачи будет опубликовано в «Задачнике «Кванта».

4. $U_0 = U_1\sqrt{3Tm_2/(\tau m_1)} = 1500$ В.

5. $R_1 = R\sqrt{r/(r + 2R)}$.

Малая теорема Ферма

(См. «Квант» №4)

44. Если НОД$(s, p-1) = d > 1$, то $\left(g^s\right)^{(p-1)/d} = \left(g^{s/d}\right)^{p-1} \equiv$ $\equiv 1 \pmod p$. Поскольку $(p-1)/d < p - 1$, мы доказали, что число g^s не является первообразным корнем по модулю p. Осталось доказать, что если НОД$(s, p-1) = 1$, то g^s – первообразный корень. Это можно делать разными способами. Можно доказывать, что числа s, $2s$, $3s$, …, $(p-1)s$ дают разные остатки при делении на $p - 1$ (попробуйте!). А можно рассуждать «от противного»: если бы g^s не было первообразным корнем, то существовало бы натуральное число $r < p - 1$, для которого $\left(g^s\right)^r \equiv 1 \pmod p$; но тогда sr должно делиться на $p - 1$, что невозможно из-за взаимной простоты чисел s и $p - 1$.

46. а) 5; б) 6. в) Так как $257 = 2^8 + 1$, то $2^{16} - 1$ делится на 257. Следовательно, порядок числа 2 по модулю 257 не превосходит 16 < 256. Проверим, что 3 – первообразный корень: $3^8 \equiv 136$, $3^{16} \equiv 249 \equiv -2^3$, $3^{64} \equiv 2^{12} = 1024 \cdot 4 \equiv (-4) \cdot 4 = -16$, следовательно, $3^{128} - 1 = \left(3^{64} - 1\right)\left(3^{64} + 1\right) \not\equiv 0 \pmod{257}$. *Ответ*: 3.

47. а) $2^8 \equiv -7 \pmod{263}$, $2^{16} \equiv 49$, $2^{32} \equiv 34$, $2^{64} \equiv 104$, $2^{128} \equiv 33$; следовательно, $2^{131} = 2^3 \cdot 2^{128} \equiv 8 \cdot 33 \equiv 1$. Значит, 2 не является первообразным корнем, а -2 – является: $(-2)^{131} \equiv -1 \not\equiv 1$ и $(-2)^2 \not\equiv 1 \pmod{263}$. б) *Указание*. Если $a^3 \not\equiv a$, то $a \not\equiv 0$ и $(\pm a)^2 \not\equiv 1$. Имеем $a^{82} - 1 = (a^{41} - 1)(a^{41} + 1)$. Значит, для всякого $a (\not\equiv 0)$ либо $a^{41} \equiv 1$, либо $a^{41} \equiv -1$. И вообще, для всякого простого числа $p = 2q + 1$, где q – тоже простое, $q > 2$, ровно одно из чисел a и $-a$, где $a^3 \not\equiv a \pmod{p}$, является первообразным корнем по модулю p.

50. а) $x \equiv 1$, $2^3 \equiv 8$, $2^6 \equiv 12$ или $2^9 \equiv 5 \pmod{13}$.

51. *Указание*. $x^7 - 1 = (x-1)(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$. *Ответ*: $x \equiv 2^4$, 2^8, 2^{12}, 2^{16}, 2^{20} или 2^{24} (mod 29). (Этот же ответ можно записать иначе: $x \equiv$ 16, 24, 7, 25, 23 или 20.)

52. Если k делится на $p - 1$, то все слагаемые сравнимы с 1 по модулю p и потому сумма сравнима с $p - 1 \not\equiv 0 \pmod{p}$. Если же k не делится на $p - 1$, то существует такое не кратное p число x, что $x^k \not\equiv 1 \pmod{p}$. Обозначим $S = 1^k + 2^k + \ldots + (p-1)^k$. Сумма $x^k + (2x)^k + \ldots + ((p-1)x)^k = x^k S$ сравнима с S по модулю p, поскольку (после взятия остатков от деления на p) ряд чисел x, $2x$, $3x$, …, $(p-1)x$ отличается от ряда 1, 2, …, $p - 1$ только перестановкой, а от перемены мест слагаемых сумма не меняется. Значит, $x^k S \equiv S \pmod{p}$, откуда $(x^k - 1)S \equiv 0$, т.е. $S \equiv 0 \pmod{p}$.

Если пользоваться существованием первообразного корня, то доказывать, что при k, не кратных $p - 1$, сумма S кратна p, можно и при помощи формулы суммы геометрической прогрессии:

$$1^k + g^k + g^{2k} + \ldots + g^{(p-2)k} = \frac{1 - g^{(p-1)k}}{1 - g^k} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Ответ: при k, не кратных $p - 1$.

53. а) $101^2(1 + 2 \cdot 8^2) = 1315929$; б) $17^3(1 + 6 \cdot 8^2) = 1891505$.

55. *Ответ*: $\varphi(n)/2$. *Указание*. Если $\text{НОД}(a, n) = 1$, то и $\text{НОД}(n - a, n) = 1$.

56. *Ответ*: 1. *Указание*. Для каждого из чисел a = 1, 2, … …, $p - 1$ существует и единственно такое число b, что $ab \equiv 1 \pmod{p}$ и $1 \le b \le p - 1$. Это число b является первообразным корнем тогда и только тогда, когда a – первообразный корень.

57. б) *Указание*. Пусть, для определенности, q – простой делитель числа m. Тогда $(ab)^{mn/q} = a^{mn/q} \cdot (b^n)^{m/q} \equiv$ $\equiv a^{mn/q} \not\equiv 1 \pmod{p}$, ибо mn/q не кратно числу m. Далее, при $p = 5$ порядки чисел 2 и 3 равны 4, а порядок произведения $2 \cdot 3 \equiv 1 \pmod{5}$ равен 1.

59. а) *Указание*. $n - 1$ кратно числу $2p$. *Замечание*. Все числа $n = (4^p - 1)/3$, где $p > 3$,– составные. При $p = 5$ получаем n = = 341.

61. б) При $a = 0$ или 1 годится $n = 4$; при $a = -2$ – число n = = 6; при $a = 2$ – указанное в пункте а) число n = 161038. При $|a| > 2$ годится $n = |a|$, если a четно, и $n = 2|a|$, если нечетно.
в) Можно считать, что $a > 1$. Пусть $a^n \equiv a \pmod{n}$, причем n четно, $n > 2$. Рассмотрим такое (существующее по теореме Биркгофа—Вандивера) простое число p, что $a^{n-1} - 1$ кратно p, но ни при каком $m < n - 1$ разность $a^m - 1$ не кратна p. В силу упражнения 32, б), число $p - 1$ делится на $n - 1$. Следовательно, $p \ge n$; а так как n четно, то $p > n$.
Поскольку $np - 1 = n - 1 + n(p-1)$ делится на $n - 1$, то $a^{np-1} - 1$ делится на $a^{n-1} - 1$. По малой теореме Ферма, a^{np-1} = $= a^{n(p-1)} \cdot a^{n-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Следовательно, разность $a^{np} - a$ делится и на n, и на p, а потому и на np. Строя таким образом все новые и новые числа, мы доказываем утверждение задачи.

62. б) Нетрудно проверить, что $n = 65$ – наименьшее составное натуральное число, для которого $3^{n-1} \equiv 2^{n-1} \pmod{n}$.
в) Если пользоваться бесконечностью множества чисел Кармайкла, то достаточно рассмотреть $n = 3^k - 2^k$, где k – число Кармайкла, и применить утверждение пункта а).
Можно обойтись и без этого, рассмотрев $n = 3^{2^t} - 2^{2^t}$. Тогда числа $3^{2^t} - 1$ и 2^{2^t} кратны 2^t, так что опять применимо утверждение пункта а).

63. *Указание*. Для любого числа a, взаимно простого с n, рассмотрите сумму $S = a^{n-1} + (2a)^{n-1} + \ldots + ((n-1)a)^{n-1}$. Докажите, что $S \equiv 1^{n-1} + 2^{n-1} + \ldots + (n-1)^{n-1} \equiv -1$ и $S \equiv a^{n-1}(1^{n-1} + 2^{n-1} + \ldots + (n-1)^{n-1}) \equiv -a^{n-1} \pmod{n}$.

65. Если p – простой делитель составного числа n, то C_n^p / n = $= (n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)/p!$ – не целое число, поскольку делимое не кратно p.

66. а) $a + \dfrac{a^p - a}{p} + \dfrac{a^{p^2} - a^p}{p^2}$;

б) $a + \dfrac{a^p - a}{p} + \dfrac{a^q - a}{q} + \dfrac{a^{pq} - a^p - a^q + a}{pq}$.

КВАНТ

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ
А.А.Егоров, Л.В.Кардасевич, С.П.Коновалов, А.Ю.Котова, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ
Д.Н.Гришукова, В.В.Иванюк, М.М.Константинова, А.И.Пацхверия, М.А.Сумнина, Л.А.Тишков

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР
Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА
Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева

ЗАВЕДУЮЩАЯ РЕДАКЦИЕЙ
Л.З.Симакова

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати.
Рег. св-во №0110473

Адрес редакции:
117296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»,
тел. 930-56-48

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени
ГУП Чеховский полиграфический комбинат
Министерства Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций
142300, г.Чехов Московской области,
Тел. (272) 71-336. Факс (272) 62-536
Заказ №