

параллелограмм (очевидно, эта точка целая). Нетрудно показать, что точка O лежит в треугольнике AB_1C . Тогда из доказанного в предыдущем абзаце следует, что она лежит в пятиугольнике $A_1B_1C_1D_1E_1$, чего не может быть. Противоречие.

4. Пусть $b_i = 1_1 + \dots + a_i$. Ясно, что $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$. Тогда

$$\frac{a_{l+1} + a_{k-m+2} + \dots + a_k}{m} = \frac{b_k - b_l}{k-l}.$$

Рассмотрим на координатной плоскости точки $B_0(0, 0)$,

$B_1(1, b_1)$, $B_2(2, b_2)$, ..., $B_n(n, b_n)$. Тогда отношение $\frac{b_k - b_l}{k-l}$ будет равно тангенсу угла наклона прямой $B_l B_k$. Значит, условие $m_k > \alpha$ будет равносильно тому, что прямая, проходящая через B_k с углом наклона $\arctg \alpha$ (эту прямую назовем l_k), будет проходить выше хотя бы одной из точек B_l при $l < k$ (такую точку B_k будем называть *хорошей*). Выражение

$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{\alpha}$ будет равно b_n/α , и это будет расстояние между точкой $(0, n)$ и точкой пересечения l_n с осью абсцисс.

Докажем индукцией по количеству точек n , что это расстояние больше числа хороших точек. База очевидна. Если точка B_n не хорошая, то выбросим ее, при этом число хороших точек не изменится, а отрезок уменьшится (так как $b_{n-1} \leq b_n$). Если же она хорошая, то пусть B_k – ближайшая (по оси абсцисс) точка, лежащая под l_n . Тогда выбросим все точки от B_{k+1} до B_n (они все хорошие), количество хороших точек уменьшится на $n - k$, а отрезок – больше, чем на $n - k$.

5. Доказываемое неравенство можно переписать в виде

$$\sin^{2n} x + (2^n - 2)\sin^n x \cos^n x + \cos^{2n} x \leq (\sin^2 x + \cos^2 x)^n.$$

При $\cos x \sin x = 0$ неравенство справедливо. Если $\cos x \sin x \neq 0$, оно с помощью замены $t = \operatorname{tg}^2 x$ сводится к неравенству

$$\left(t + \frac{1}{t}\right)^n \geq t^n + \frac{1}{t^n} + 2^n - 2,$$

справедливого при всех $t > 0$. Это неравенство легко доказывается по индукции.

6. Решение аналогично решению задачи 6 для 10 класса.

7. Пусть для определенности O лежит на продолжении отрезка AB за точку B (рис.9). Обозначим через P, Q точки пересечения KL с окружностью ω , через M, N – точки касания сторон BC и AD с ω . Проведем касательные l_1, l_2 к ω в точках P, Q . Обозначим через α угол между касательной l_1 (или l_2) и хордой PQ .

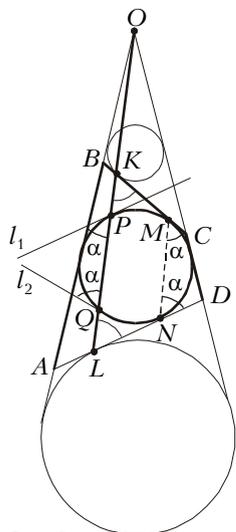


Рис. 9

При гомотетии с центром O , переводящей окружность ω в ω , касательная BC в точке K перейдет в l_2 ; при гомотетии, переводящей окружность ω_2 в ω , прямая AD перейдет в l_1 . Отсюда $BC \parallel l_2$, $AD \parallel l_1$ и, следовательно, $\angle LKC = \angle KLD = \alpha$. Кроме того, $\angle BMN = \angle ANM$, как углы между касательной и хордой. Отсюда получаем, что четырехугольник $KLNM$ – равнобокая трапеция и $\angle NMC = \angle MND = \alpha$. Итак, хорды PQ и MN параллельны и стягивают равные дуги величиной 2α . Отсюда следует, что средняя линия этой трапеции проходит через центр ω . Но середина KM совпадает с серединой BC (точки касания стороны треугольника со вписанной и невписанной окружностями, как известно, симметричны относительно середины

стороны), и также середина LN совпадает с серединой AD .

8. Предположим противное: пусть среди четырех клеток на пересечении любых двух строк и любых двух столбцов есть две клетки одинакового цвета. Для удобства будем нумеровать цвета числами от 1 до 4. Назовем *парой* две клетки разного цвета, лежащие в одном столбце. Назовем *совпадением* две клетки одинакового цвета, лежащие в одном столбце или в одной строке. Разделим пары на 6 типов по цветам входящих в них клеток: $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{2,3\}$, $\{2,4\}$, $\{3,4\}$.

Рассмотрим две произвольные строчки. Докажем, что в этих двух строчках всего не менее 25 совпадений. Из сделанного предположения следует, что любые две пары с клетками в этих строчках должны иметь общий цвет. Нетрудно заметить, что возможны два принципиально различных случая: все пары содержат цвет 1 или есть пары типов $\{1,2\}$, $\{1,3\}$ и $\{2,3\}$. Рассмотрим эти два случая.

Если все пары в наших двух строчках содержат клетку цвета 1, то всего пар не более, чем клеток цвета 1 в обеих строчках, т.е. не более 50. Значит, в рассматриваемых двух строчках не менее 50 совпадений.

Пусть есть пары типов $\{1,2\}$, $\{1,3\}$ и $\{2,3\}$. В этом случае все клетки цвета 4 в наших строчках совпадают, и таким образом есть не менее 25 совпадений.

Итак, мы доказали, что в любой паре строчек не менее 25 совпадений, аналогичный результат верен и для любой пары столбцов. Таким образом, всего в нашем квадрате есть не менее $2 \cdot \frac{99 \cdot 100}{2} \cdot 25 = 25 \cdot 99 \cdot 100$ пар клеток одинакового цвета, лежащих в одной строке или в одном столбце. Но так как в любой строке и в любом столбце по 25 клеток каждого цвета, количество пар клеток одного цвета, лежащих в одном столбце или в одной строке, равно $200 \cdot \frac{25 \cdot 24}{2} \cdot 4 = 24 \cdot 100^2$. Учитывая, что $25 \cdot 99 > 24 \cdot 100$, мы приходим к противоречию.

XXXIV Всероссийская олимпиада школьников по физике

Теоретический тур

9 класс

- $\omega^+ = A(l + \mu h)$, $\omega^- = A(l - \mu h)$, где $A = 2P/(RMgL\mu)$; в случае вращения против часовой стрелки при $l \leq \mu h$ происходит заклинивание.
- Решение этой задачи будет опубликовано в «Задачнике «Кванта».
- $\lambda_2 = \lambda_1 - (c_1 - c_2)(t_0 - t_1) = 3,12 \cdot 10^5$ Дж/кг.
- $U_{13} = 3,75$ В, $U_{23} = 11,25$ В; резисторы могут быть соединены «треугольником» или «звездой» в первом случае сопротивления резисторов равны $R, 2R$ и $3R$, а во втором – $R, 3R/2$ и $3R$.

10 класс

- 1) $v_m \approx 2,1$ м/с; 2) при $v_0 > 0,38$ м/с, $\Delta = 3,5$ м/с.
- Решение этой задачи будет опубликовано в «Задачнике «Кванта».
- $t_{\text{уст}} \approx 65$ °С, $\alpha_{\text{уст}} \approx 0,35$. 4. $Q = (2,0 \pm 0,2)p_0 V_0$.
- 1) $I_1 = I_2 = (\varepsilon_2 + \varepsilon_1/2)/R$; 2) $\Delta W = C(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2)^2/4$;
3) $A_1 = C\varepsilon_1(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2)/2$, $A_2 = C\varepsilon_2(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2)$;
4) $Q = C(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2)^2/4$.

11 класс

- $\Omega = 1,72$ с⁻¹, $A_2 = 0,29$ м.
- Решение этой задачи будет опубликовано в «Задачнике «Кванта».
- $U_0 = U_1 \sqrt{3Tm_2/(Tm_1)} = 1500$ В.
- $R_1 = R \sqrt{r/(r + 2R)}$.