

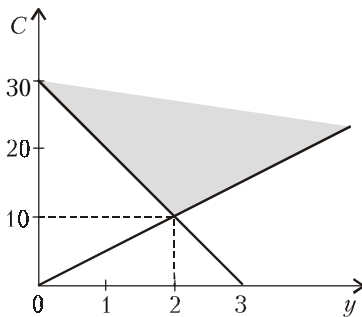
дующим образом: $C = x + 100y$, т.е. часть премии ($C - x$) вложил в акции. Завтра станет известна новая цена акции, продавец имеет новый капитал:

Цена акции	Капитал
\$100	$C = x + 100y$
\$110	$x + 110y = C + 10y$
\$95	$x + 95y = C - 5y$

Продавец выполнит опцион, если сумеет выплатить доход покупателю, не рискуя дополнительным капиталом, т.е. если $C + 10y \geq 30$, $C - 5y \geq 0$.

В плоскости (y, C) этим условиям удовлетворяют все точки закрашенной области (см. рисунок). Минимальное значение $C = 10$ достигается при $y = 2$. Это и есть справедливая цена опциона.

Стратегия продавца: получив премию \$10, берет в долг (или вкладывает свои) \$190 и покупает 2 акции по \$100. Если завтра цена акции станет \$110, то продавец опциона,



реализовав 2 акции, имеет \$220; этого достаточно, чтобы вернуть долг \$190 (или свои) и выплатить доход \$30 покупателю. Если же акция будет стоить \$95, то после продажи двух акций у продавца будет ровно \$190 на возврат долга (или своих). В этой ситуации средняя прибыль покупателя \$5, а продавца \$0 – он не рисковал.

Инвестиционная цена

Рассмотрим модель АВ-рынка с двумя активами – акцией и банковским счетом. Пусть процентная ставка банка $r\%$, цена акции сегодня a и прогноз на завтра $+m\% - n\%$ ($1 : 1$), $-1 < n < r < m$. Допустим, участнику рынка предстоят выплаты завтра (погашение опциона или выполнение условий контракта и т.д.). Пусть M и N – суммы, которые он обязан выплатить в зависимости от новой цены акции $a(1+m)$ или $a(1+n)$

соответственно. В таких случаях говорят, что игроку предъявлено *платежное поручение*.

Минимальный капитал C , который гарантирует игроку выполнение платежного поручения (получение завтра капитала M или N в зависимости от новой цены акции соответственно), называется *инвестиционной ценой проекта*.

Справедливая цена опциона – это его инвестиционная цена.

Пусть игрок распределил сегодня капитал $C = x + ay$, тогда завтра его капитал будет

$$\begin{aligned} x(1+r) + ay(1+m) &= \\ &= C(1+r) + ay(m-r) = \\ &= x(r-m) + C(1+m) = M \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} x(1+r) + ay(1+n) &= \\ &= C(1+r) + ay(n-r) = \\ &= x(r-n) + C(1+n) = N. \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$C = \frac{Mz + N(1+z)}{1+r}, \quad y = \frac{M-N}{a(m-n)},$$

$$x = C - ay = \frac{Mq + N(1-q)}{1+r},$$

$$\text{где } z = \frac{r-n}{m-n}, \quad q = \frac{1+n}{n-m}.$$

Портфель (x, y) обеспечивает стратегию, гарантирующую получение необходимого капитала завтра, т.е. выполнение платежного поручения. Нахождение таких стратегий (хеджей) – одна из важных задач финансовой математики.

Если выполнение платежного поручения предстоит на S -й день и величина выплаты при цене акции $A_{Sk} = a(b+mg)^k(b+ng)^{S-k}$ равна F_{Sk} , то нетрудно показать, что инвестиционная цена будет определяться формулой

$$C = \frac{1}{(b+rg)^S} \sum_{k=0}^S F_{Sk} C_S^k z^{S-k} (b-zg)^k,$$

$$\text{где } C_S^k = \frac{S!}{k!(b-k)g^k}$$

Если платежное поручение на S -й день состоит в погашении опциона на покупку акции по цене K , то величина выплаты, очевидно, равна

$$\begin{aligned} F_{Sk} &= \max\{A_{Sk} - K, 0\} \\ &= \max\{a(b+mg)^k(b+ng)^{S-k} - K, 0\}. \end{aligned}$$

Подставив это значение в формулу инвестиционной цены, получим формулу Кокса-Росса-Рубинштейна справедливой цены опциона для модели АВ-рынка:

$$\begin{aligned} C &= a \sum_{k=0}^{k_0} C_S^k q^{S-k} (b-rg)^k - \\ &- \frac{K}{(b+rg)^S} \sum_{k=0}^{k_0} C_S^k z^{S-k} (b-zg)^k, \end{aligned}$$

где $q = \frac{b+mg}{1+r}$,

$$k_0 = \left\lfloor \frac{K}{a(b+mg)} : \ln \frac{1+n}{1+m} \right\rfloor$$

Запись $[x]$ означает целую часть числа x – наибольшее целое, не превосходящее числа x .

Ремарка. В 1973 году были опубликованы статьи Ф.Блака и М.Шоулса «Расчеты цены опционов и обязательства корпораций» и Р.Мертон «Теория расчета рациональной цены опциона». Насколько важными оказались изложенные результаты, можно судить по тому факту, что в 1997 году Р.Мертону и М.Шоулсу была присуждена Нобелевская премия (Ф.Блэк скончался в 1995 году). Это второй случай присуждения Нобелевской премии за работы по экономике математикам. Впервые этой чести удостоился академик Л.Канторович (СССР) в 1975 году за работу по экономике 1939 года «Математические методы организации и планирования производства». Совместно с ним премию получил Т.Купманс (США), труд которого был опубликован в 1951 году.