Случай в газовой туманности

А.СТАСЕНКО

Бешено стучали сердца, вращались рототроны, дрожали осцилляторы; смотроскопы показывали искривление пространства-времени. Сквозь заклепки сочились кванты. Черная энтропия росла...
– Ба, да ведь мы на краю обыкновенной гиперплоскости! – воскликнул Сто Двадцать Пятый штурман.

Из квазинаучной фантастики

СЛУЧИЛОСЬ ЭТО КАК-ТО ДАВНЫМ-давно: два звездолета нежданно попали в область притяжения холодного водородного облака и истратили весь запас топлива на торможение, так что остановились буквально у его границы. Что было делать? Конечно, «лечь в дрейф», как говорили древние моряки, – ничего не делать и ждать помощи.

Тут астронавты заметили, что корабли затормозили у границы облака в разном положении: один – перпендикулярно границе, а другой – параллельно. (Надобно сказать, что в ту пору звездолеты строили в виде тонких дисков.) Засели штурманы за компьютеры и решили узнать, как будут двигаться их корабли и – самое главное – когда они будут вновь сближаться. Засядем и мы.

Пусть (как вскоре и выяснили астронавты) облако водорода будет плоским и однородным (т.е. постоянной плотности). Поскольку есть скопление массы, должно быть поле тяготения. Ясно, что во всех точках средней плоскости (при $x = 0$ на рисунке 1) сила тяготения равна нулю – из соображений симметрии. При удалении от плоскости симметрии сила тяготения в расчете на единицу массы – т.е. ускорение тяготения – должна расти по модулю, а, как вектор, ускорение тяготения должно быть направлено к плоскости симметрии.

Великий математик Гаусс догадался, как все эти мысли записать короче. Выделим мысленно внутри слоя коробку с крышками площадью S, расположенными при x и $-x$ параллельно границам (и плоскости симметрии) газового слоя (на рисунке 1,*а* она показана сбоку). Ускорение тяготения $g(x)$ постоянно во всех точках этих крышек. Похоже, что оно как бы «втекает» внутрь коробки, поэтому произведение $2Sg(x)$ называется потоком вектора $\vec{g}$ внутрь этой коробки. Так вот, *теорема Гаусса* утверждает, что этот поток пропорционален массе вещества внутри коробки $\rho \cdot 2Sx$ – только эта масса и порождает этот поток, причем коэффициентом пропорциональности является гравитационная постоянная G, умноженная на 4π. Таким образом,

$$2Sg(x) = -4\pi G\rho \cdot 2Sx\,, \qquad (1)$$

где знак «минус» показывает, что вектор $\vec{g}$ направлен именно внутрь коробки.

Кто хочет, может проверить теорему Гаусса на примере точечной гравитирующей массы m_1. Действительно, окружим точечную массу сферой радиусом r и, значит, площадью $4\pi r^2$ (рис.2). Тогда

$$g(r) \cdot 4\pi r^2 = -4\pi G m_1\,,$$

откуда

$$g(r) = -\frac{Gm_1}{r^2}$$

– получили известное выражение для ускорения силы Ньютона для гравитирующей точки. Можно сказать, что закон всемирного тяготения «спрятан» в теореме Гаусса.

Итак, из равенства (1) находим

$$g(x) = -4\pi G\rho x\,.$$

Но если сила пропорциональна смещению x (см. рис.1,*б*), то потенциальная энергия пропорциональна $x^2/2$ (см. рис.1,*в*). Вспомним, например, пружину жесткостью k: возвращаю-

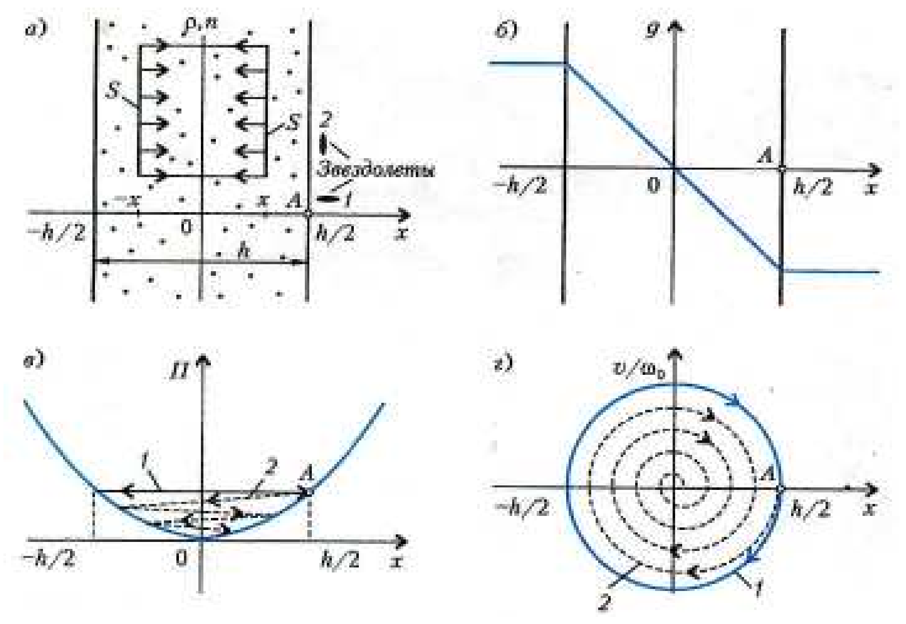

Рис. 1

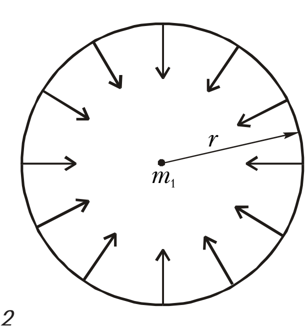

Рис. 2

щая сила равна $F = -kx$, потенциальная энергия равна $\Pi = kx^2/2$.

В нашем случае, очевидно, $k = 4\pi MG\rho$, где M – масса звездолета. Значит, суммарная механическая энергия звездолета, находящегося на расстоянии x от плоскости симметрии облака и имеющего здесь скорость v, равна

$$\frac{Mv^2}{2} + 4\pi MG\rho\frac{x^2}{2}.$$

Первый звездолет-диск, движущийся ребром к границам плоского облака, почти не встречает сопротивления. Поэтому его суммарная механическая энергия постоянна и равна, например, ее значению на краю облака

$$\frac{M\cdot 0^2}{2} + \frac{4\pi MG\rho}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2$$

(учтено, что скорость при этом нулевая). Тогда закон сохранения энергии звездолета можно записать так:

$$\left(\frac{v}{\sqrt{4\pi G\rho}}\right)^2 + x^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2. \qquad (2)$$

Здесь $\sqrt{4\pi G\rho} = \omega_0$ – это угловая частота гармонических колебаний звездолета внутри параболической потенциальной ямы (рис.3), следовательно, период колебаний будет равен

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \sqrt{\frac{\pi}{G\rho}}. \qquad (3)$$

С другой стороны, соотношение (2) можно графически представить в координатах x, v/ω_0 (на так называемой *фазовой плоскости*) в виде окружности радиусом $h/2$ (см. рис.1,*г*): движение начинается из точки A (где $x_A = h/2$ и $v_A = 0$) и в отсутствие трения происходит вечно, возвращаясь в эту же точку через время T_0. А еще можно записать смещение и скорость звездолета *1* как функции времени:

$$x = \frac{h}{2}\cos\omega_0 t,\ v = -\frac{h}{2}\omega_0\sin\omega_0 t. \quad (4)$$

С такой точки зрения, равенство (2) – это просо теорема Пифагора в координатах x, v/ω_0.

Но что происходит со вторым звездолетом, который пересекает облако плашмя? Так как у него большое поперечное сечение $S_\perp = \pi a^2$, где a – его радиус, он будет тормозиться за счет столкновений с молекулами. Если считать удары молекул абсолютно упругими, то каждая из них (массой m) сообщает звездолету импульс $-2mv$, а так как в единицу времени он «заметает» объем пространства $S_\perp v$, то полный поток импульса (т.е. сила сопротивления) составит $\pi a^2\cdot 2\rho v^2$ (здесь учтено, что $\rho = mn$, где n – концентрация молекул в облаке). Значит, при перемещении звездолета на расстояние Δx работа силы сопротивления равна $\pi a^2\cdot 2\rho v^2\Delta x$. Полная механическая энергия второго звездолета уже не будет постоянной (см. рис.1,*в*), и ее убыль на перемещении Δx составит

$$\Delta\left(\frac{1}{2}\left(\frac{v}{\omega_0}\right)^2 + \frac{x^2}{2}\right) = -\frac{\pi a^2\cdot 2\rho}{M}\left(\frac{v}{\omega_0}\right)^2|\Delta x|. \quad (5)$$

Очевидно, что это будут уже затухающие колебания (см. рис.3; штриховая линия). Период их будет больше T_0, и

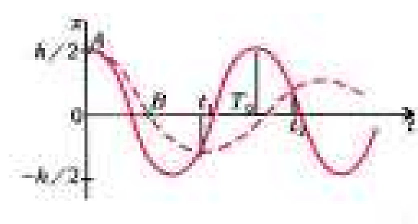

Рис. 3

ясно почему: из-за силы торможения второй звездолет уже впервые дойдет до плоскости симметрии (точка B) позднее, чем первый. А на фазовой плоскости движение второго звездолета изобразится в виде спирали (см. рис.1,*г*).

Можно написать решение уравнения (5) в виде кривой в фазовой плоскости:

$$\left(\frac{v}{\omega_0}\right)^2 = -2l\left(x - l - \left(\frac{h}{2} - l\right)e^{\frac{h/2-x}{l}}\right), \qquad (6)$$

где введено обозначение

$$l = \frac{M}{\pi a^2\cdot 4\rho}. \qquad (7)$$

Величина l имеет размерность длины и, очевидно, является тем характерным расстоянием, на котором существенно изменяется кинетическая энергия второго звездолета из-за силы сопротивления.

Кто хочет убедиться в правильности этого решения, пусть подставит его в уравнение (5), а кто не может, пусть не расстраивается, а поступает на факультет аэромеханики и летательной техники Московского физико-технического института – тогда и сможет.

Да, но! – воскликнул капитан одного из звездолетов. – Если внутри этого газового слоя есть гравитация, то почему он не сжимается к плоскости симметрии?!

Другой капитан объяснил ему по радио, что сжатию препятствует хаотическое, «тепловое» движение молекул. В самом деле, хотя облако и холодное – температура порядка 20 К, т.е. раз в 15 меньше, чем средняя температура Земли, – но и молекулы водорода тоже раз в пятнадцать легче, чем молекулы воздуха, поэтому средняя скорость их теплового движения никак не меньше, чем у молекул земной атмосферы, а ведь атмосфера не падает на поверхность нашей родной планеты. Конечно, плотность атмосферы не постоянна – она убывает с высотой, так что и наличие резкой границы плотности у встретившегося облака есть не более чем предположение, упрощающее расчеты.

Теперь осталось подставить в уравнение (6) кинематическое определение скорости $v = dx/dt$ и, решая полученное дифференциальное уравнение (например, на компьютере), найти «расписание движения» $x(t)$ второго звездолета. Но это и не обязательно делать прямо сейчас – пусть этим занимаются штурманы, а мы по сути дела уже все описали качественно. Например, моменты времени новых встреч звездолетов ($t_1, t_2, \ldots$) можно будет найти из графиков на рисунке 3.

Сделаем лишь некоторые численные оценки. Примем плотность молекулярного облака $\rho \sim 10^{-16}$ кг/м^3, его характерную толщину $h \sim 0{,}1$ парсека $= 3\cdot 10^{15}$ м. В качестве данных для звездолетов возьмем, например, следующие: масса $M \sim 1000$ тонн $= 10^6$ кг (три современных авиалайнера), радиус диска $a \sim 100$ м. Тогда, согласно выражению (3), для периода гармонических колебаний первого звездолета получим

$$T_0 \sim \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{6{,}67\cdot 10^{-11}\ \frac{\text{м}^3}{\text{кг}\cdot\text{с}^2}\cdot 10^{-16}\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}}} \sim 0{,}3\cdot 10^{14}\ \text{с} \approx 10^6\ \text{лет}.$$

Наибольшая скорость движения, которая достигается в плоскости симметрии облака (при $x = 0$), согласно уравнению (2), равна

$$v_{\max} = \frac{h}{2}\sqrt{4\pi G\rho} \sim 400\ \text{м/с},$$

(Продолжение см. на с. 41)

(Начало см. на с. 41)

что сравнимо со средней тепловой скоростью движения молекул. Поэтому к проведенному выше вычислению силы сопротивления нужно тоже относиться лишь как к оценке по порядку величины. Зато уж точно взаимодействие звездолета с облаком является, как говорят физики, *свободномолекулярным*. Действительно, средняя длина свободного пробега молекул между их столкновениями зависит от концентрации молекул n и поперечного сечения их взаимодействия $\pi(2r_м)^2$ так: $\lambda \sim \dfrac{1}{n\pi(2r_м)^2}$. Подставляя сюда

$$n = \rho/m_{H_2} \sim$$

$$\sim 10^{-16} \text{ кг/м}^3 \Big/ \left(2 \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}\right) \sim$$

$$\sim 3 \cdot 10^{10} \text{ м}^{-3}$$

и $r_м \sim 3 \cdot 10^{-10}$ м, получим $\lambda \sim 3 \cdot 10^7$ м, что много больше размеров звездолета. Значит, молекулы ударяются о его поверхность независимо друг от друга (не образуя сплошной среды).

Характерное расстояние, на котором заметно убывает энергия второго звездолета (оно входит в показатель экспоненты в равенстве (6)), равно

$$l \sim \frac{10^6 \text{ кг}}{\pi \cdot 10^4 \text{ м}^2 \cdot 4 \cdot 10^{-16} \dfrac{\text{кг}}{\text{м}^3}} \sim 10^{17} \text{ м}.$$

Это заметно больше принятой толщины газового облака; значит, затухание колебаний в его пределах будет незначительным.

Однако вспомним T_0: долго же колебаться звездолетам! Вы же без колебаний изучайте физику и подписывайтесь на «Квант».