МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Неравенство Караматы

Д.НОМИРОВСКИЙ

В статье О.Ижболдина и Л.Курляндчика (см. с.7) «Неравенство Иенсена» рассказывается о неравенствах, связанных с выпуклыми функциями. Читателям, впервые сталкивающимся с выпуклыми функциями, необходимо с ней ознакомиться. А здесь речь пойдет об одном замечательном приеме, который можно эффективно применять при доказательстве неравенств.

Формулировка неравенства Караматы

Определение. Пусть даны два упорядоченных набора из n действительных чисел

$$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n),\ \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n),$$

для которых $a_i \ge a_{i+1}$, $b_i \ge b_{i+1}$ при $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Мы будем говорить, что набор $\boldsymbol{a}$ *мажорирует* набор $\boldsymbol{b}$, и писать $\boldsymbol{a} \succ \boldsymbol{b}$, если

$$\begin{cases} a_1 \ge b_1, \\ a_1 + a_2 \ge b_1 + b_2, \\ \quad \ldots \\ a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} \ge b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1}, \\ a_1 + a_2 + \ldots + a_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n. \end{cases} \qquad (1)$$

Теорема. *Для любой выпуклой функции $y = f(x)$, определенной на некотором промежутке I, и любых двух наборов чисел $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ из этого промежутка, удовлетворяющих условию $\boldsymbol{a} \succ \boldsymbol{b}$,* *справедливо неравенство*

$$f(a_1)+f(a_2)+\ldots+f(a_n)\ge$$
$$\ge f(b_1)+f(b_2)+\ldots+f(b_n).\quad(2)$$

Это неравенство и называется неравенством Караматы [1].

Связь с другими неравенствами

Отметим, что неравенство Караматы является обобщением неравенства Иенсена. Действительно, положив $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = \overline{a}$, где $\overline{a}$ – среднее арифметическое чисел $a_1, \ldots, a_n$, получаем

$$f(a_1)+f(a_2)+\ldots+f(a_n)\ge$$
$$\ge nf\left((a_1+a_2+\ldots+a_n)/n\right).\quad(3)$$

Упражнение 1. Докажите, что для наборов $(a_1,\ldots,a_n)$, $(\overline{a},\ldots,\overline{a})$ выполняются условия (1).

А это значит, что из неравенства Караматы следуют классические неравенства Коши, Коши – Буняковского, Гёльдера, Минковского и т.д.

Правда, в статье О.Ижболдина и Л.Курляндчика для доказательства этих неравенств. применялось «весовое» неравенство Иенсена

$$\frac{m_1f(x_1)+m_2f(x_2)+\ldots+m_kf(x_k)}{m_1+m_2+\ldots+m_k}\ge$$
$$\ge f\left(\frac{m_1x_1+m_2x_2+\ldots+m_kx_k}{m_1+m_2+\ldots+m_k}\right),\ m_i>0,\quad(4)$$

а мы получили лишь его частный случай $m_i = 1$. Впрочем, это не так страшно, поскольку из (3) несложно получить (4). В случае $m_i \in \boldsymbol{N}$ необходимо в наборе $a_1, \ldots, a_n$ первые m_1 переменных взять равными x_1, следующие m_2 равными x_2, и т.д. Далее необходимо расширить множество, из которого выбираются числа m_i, до $\boldsymbol{Q}^+$, а потом (если вы знакомы с теорией пределов) и до $\boldsymbol{R}^+$. Кстати, аналогично можно получить и «весовое» неравенство Караматы (см. далее упражнение 5).

Упражнение 2. Докажите неравенство (4) для произвольных действительных чисел $m_i > 0$.

Применение в задачах

Задача 1. *Пусть* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [-\pi/6;\ \pi/6]$. *Докажите, что*

$$\cos(2x_1-x_2)+\cos(2x_2-x_3)+\ldots$$
$$\ldots+\cos(2x_n-x_1)\le\cos x_1+\ldots+\cos x_n.$$

Решение. Поскольку функция $\cos x$ вогнута на отрезке $[-\pi/2;\ \pi/2]$, то достаточно проверить выполнение условий (1) для наборов $(2x_1-x_2,\ldots,2x_n-x_1)$ и $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. Упорядочив их, получим наборы

$$\boldsymbol{a}\colon\ 2x_{m_1}-x_{m_1+1}\ge$$
$$\ge 2x_{m_2}-x_{m_2+1}\ge\ldots\ge 2x_{m_n}-x_{m_n+1}\quad(5)$$

(при этом считаем, что $x_{n+1} = x_1$) и

$$\boldsymbol{b}\colon\ x_{k_1}\ge x_{k_2}\ge\ldots\ge x_{k_n}.\quad(6)$$

Заметим, что

$$2x_{m_1}-x_{m_1+1}\ge 2x_{k_1}-x_{k_1+1}\ge x_{k_1},$$
$$\left(2x_{m_1}-x_{m_1+1}\right)+\left(2x_{m_2}-x_{m_2+1}\right)\ge$$
$$\ge\left(2x_{k_1}-x_{k_1+1}\right)+\left(2x_{k_2}-x_{k_2+1}\right)\ge$$
$$\ge x_{k_1}+x_{k_2}.$$

Аналогично, сумма *первых* l слагаемых набора $\boldsymbol{a}$ не меньше суммы *любых* l слагаемых этого же набора. В частности, она не меньше, чем $\left(2x_{k_i}-x_{k_i+1}\right)+\ldots+\left(2x_{k_l+1}\right)$, а эта сумма не меньше, чем $x_{k_1}+x_{k_2}+\ldots+x_{k_l}$ (убедитесь в этом). Итак, $\boldsymbol{a}\succ\boldsymbol{b}$.

Задача 2. *Пусть* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *– положительные числа. Докажите, что*

$$\frac{a_1^3}{a_2}+\frac{a_2^3}{a_3}+\ldots+\frac{a_n^3}{a_1}\ge a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2.$$

Решение. Выполним замену $x_i = \ln a_i$ и перепишем неравенство в виде

$$e^{3x_1-x_2}+e^{3x_2-x_3}+\ldots+e^{3x_n-x_1}\ge$$
$$\ge e^{2x_1}+e^{2x_2}+\ldots+e^{2x_n}.$$

Далее решение аналогично рассуждениям предыдущей задачи при

$$f(x) = e^x,$$
$$\boldsymbol{a} = (3x_1-x_2, 3x_2-x_3,\ldots,3x_n-x_1),$$
$$\boldsymbol{b} = (2x_1, 2x_2,\ldots,2x_n).$$

Задача 3 (Турнир городов, 1994 г.). *Пусть* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *– положительные числа. Докажите, что*

$$(1+a_1)\cdot(1+a_2)\cdot\ldots\cdot(1+a_n)\le$$
$$\le\left(1+\frac{a_1^2}{a_2}\right)\cdot\left(1+\frac{a_2^2}{a_3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{a_n^2}{a_1}\right).$$

Решение. Перепишем неравенство в виде

$$\ln(a_1^2+a_1)+\ldots+\ln(a_n^2+a_n)\le$$
$$\le\ln(a_1^2+a_2)+$$
$$+\ln(a_2^2+a_3)+\ldots+\ln(a_n^2+a_1).$$

Функция $\ln x$ вогнута, поэтому осталось проверить справедливость условий (1) для наборов $(a_1^2+a_1,\ldots,a_n^2+a_n)$ и $(a_1^2+a_2, a_2^2+a_3,\ldots,a_n^2+a_1)$, что делается аналогично задаче 1. Если упорядочить числа a_i: $a_{k_1}\ge a_{k_2}\ge\ldots\ge a_{k_n}$, то наборы упорядочатся следующим образом:

$$a_{k_1}^2+a_{k_1}\ge a_{k_2}^2+a_{k_2}\ge\ldots\ge a_{k_n}^2+a_{k_n},$$
$$a_{m_1}^2+a_{m_1+1}\ge a_{m_2}^2+a_{m_2+1}\ge\ldots\ge a_{m_n}^2+a_{m_n+1}.$$

И неравенства системы (1), очевидным образом, следуют из $a_{k_1}>a_{k_2}>\ldots>a_{k_n}$. Действительно,

$$\begin{cases} a_{k_1}^2+a_{k_1}\ge a_{m_1}^2+a_{k_1}\ge a_{m_1}^2+a_{m_1+1},\\ a_{k_1}^2+a_{k_1}+a_{k_2}^2+a_{k_2}\ge a_{m_1}^2+a_{k_1}+a_{m_2}^2+\\ +a_{k_2}\ge a_{m_1}^2+a_{m_1+1}+a_{m_2}^2+a_{m_2+1},\\ \ldots\end{cases}$$

Отметим, что для решения этой задачи можно было выбрать и другую функцию, а именно $f(x) = \ln(1+e^x)$ на наборах $\boldsymbol{a} = (x_1, x_2,\ldots,x_n)$ и $\boldsymbol{b} = (2x_1-x_2, 2x_2-x_3,\ldots,2x_n-x_1)$, где $x_i = \ln a_i$.

Задача 4 (Всесоюзная олимпиада, 1975 г.). *Пусть a, b, c – положительные числа. Докажите, что*

$$a^3+b^3+c^3+3abc\ge$$
$$\ge a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b.$$

Решение. В силу симметрии неравенства будем считать, что $a\ge b\ge c$. Подобно задаче 2, введем замену $x = \ln a$, $y = \ln b$, $z = \ln c$ и перепишем неравенство в виде

$$e^{3x}+e^{3y}+e^{3z}+e^{x+y+z}+$$
$$+e^{x+y+z}+e^{x+y+z}\ge$$
$$\ge e^{2x+y}+e^{2x+z}+e^{2y+x}+$$
$$+e^{2y+z}+e^{2z+x}+e^{2z+y}.$$

Докажем, что набор $(3x, 3y, 3z, x+y+z, x+y+z, x+y+z)$ мажорирует $(2x+y, 2x+z, 2y+x, 2y+z, 2z+x, 2z+y)$, откуда и будет следовать решение. Упорядочим оба набора. Ясно, что $3x\ge x+y+z\ge 3z$. Предположим, что $x+y+z\ge 3y$ (случай $3y\ge x+y+z$ рассматривается анало-

---

[1] *Йован Карамата (1902–1967) – югославский математик, академик. Его основные труды относятся к теории рядов Фурье; он внес также значительный вклад в развитие математической статистики. Утверждение, аналогичное приведенной теореме, было независимо доказано Харди, Литлвудом, Пойа.*

гично). Тогда, очевидно, выполняются следующие неравенства:

$$3x \ge x + y + z \ge 3y \ge 3z,$$

$$2x + y \ge 2x + z \ge 2y + x \ge$$
$$\ge 2z + x \ge 2y + z \ge 2z + y,$$

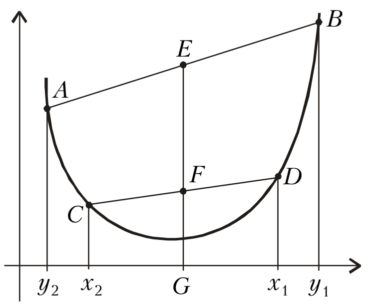
откуда следует справедливость условий (1).

Доказательство неравенства Караматы

Предварительно докажем следующие леммы.

Лемма 1 (про четыре точки). *Если f – выпуклая функция и $x_1 + x_2 = y_1 + y_2$ ($y_1 \ge x_1 \ge x_2 \ge y_2$), то $f(y_1) + f(y_2) \ge f(x_1) + f(x_2)$.*

Утверждение леммы фактически очевидно (хотя строгое аналитическое доказательство требует некоторой возни). Действительно, отрезок AB находится выше CD, а следовательно, и середина отрезка AB – точка E –



находится выше точки F – середины CD, что и является утверждением леммы, поскольку

$$EG = \left(f(y_1) + f(y_2)\right)/2,$$

$$FG = \left(f(x_1) + f(x_2)\right)/2.$$

Определение. *Раздвиганием набора $(x_1, \ldots, x_n)$ будем называть одновременное увеличение x_i и уменьшение x_j с сохранением их суммы ($x_i \ge x_j$).*

Лемма 1 утверждает, что при раздвигании набора величина $f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)$ не убывает. Этот факт сам по себе представляет полезный инструмент доказательства неравенств (см., например задачу М1272).[2]

Будем считать исходный набор упорядоченным. Покажем, что всякий полученный из него раздвиганием и упорядочиванием набор мажорирует исходный. Если при раздвигании порядок не нарушается, утверждение очевидно. Рассмотрим пример, когда порядок нарушается.

Пусть есть упорядоченный набор (8, 6, 5, 4). Раздвигание чисел 5 и 4 переводит его в неупорядоченный набор (8, 6, 9, 0). Последующее упорядочивание дает набор (9, 8, 6, 0), который мажорирует исходный. Однако эту процедуру можно заменить цепочкой раздвиганий, сохраняющих порядок:

$$(8,6,5,4) \Rightarrow (8,6,6,3) \Rightarrow$$
$$(8,8,6,1) \Rightarrow (9,8,6,0).$$

На первом этапе раздвигались последние два числа, на втором – второе и четвертое, на третьем – первое и четвертое. С другой стороны, на каждом этапе упорядоченность не менялась и поэтому

$$(9,8,6,0) \succ (8,8,6,1) \succ (8,6,6,3) \succ (8,6,5,4).$$

Оказывается, что и в общем случае всякое раздвигание с последующим упорядочиванием можно заменить цепочкой раздвиганий, сохраняющих порядок (это можно доказать по индукции).

Лемма 2 (Карамата, Харди, Литлвуд, Пойа). *От набора $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ с помощью последовательных раздвиганий можно перейти к набору $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{a} \succ \boldsymbol{b}$.*

Доказательство. *Необходимость* условия $\boldsymbol{a} \succ \boldsymbol{b}$ очевидна. Действительно, переходя от $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ к $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, после каждого раздвигания получаем набор, мажорирующий предыдущий, а значит, и исходный набор $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_n)$.

Достаточность. Докажем, что если $\boldsymbol{a} \succ \boldsymbol{b}$, то от набора $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ можно перейти к $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$. Доказательство проведем индукцией по числу переменных набора.

1. $n = 1$. Утверждение очевидно.

2. Пусть для любого k, $1 \le k \le n-1$, доказано, что при выполнении условия $(a_1, \ldots, a_k) \succ (b_1, \ldots, b_k)$ от набора $(b_1, \ldots, b_k)$ можно с помощью раздвиганий перейти к $(a_1, \ldots, a_k)$. Докажем это утверждение для $k = n$. В наборе $(b_1, \ldots, b_n)$ будем непрерывно раздвигать b_1, b_n (b_1 – максимальное число набора, b_n – минимальное). Тогда правые части всех неравенств системы (1) будут расти, а значит, в некоторый момент какое-то неравенство превратится в равенство

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_l = b_1^* + b_2 + \ldots + b_l,$$

где b_1^* – новое положение переменной b_1.

Учитывая это равенство, сделаем в системе (1) очевидные сокращения:

$$\begin{cases} a_1 \ge b_1^*, \\ a_1 + a_2 \ge b_1^* + b_2, \\ \quad \ldots \\ a_1 + \ldots + a_l = b_1^* + b_2 + \ldots + b_l \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} a_{l+1} \ge b_{l+1}, \\ a_{l+1} + a_{l+2} \ge b_{l+1} + b_{l+2}, \\ \quad \ldots \\ a_{l+1} + \ldots + a_n = b_{l+1} + b_{l+2} + \ldots + b_n^*. \end{cases}$$

По предположению индукции от набора $\boldsymbol{b}' = (b_1^*, \ldots, b_l)$ можно перейти к $\boldsymbol{a}' = (a_1, \ldots, a_l)$ и от $\boldsymbol{b}'' = (b_{l+1}, b_{l+2}, \ldots, b_n^*)$ к $\boldsymbol{a}'' = (a_{l+1}, \ldots, a_n)$ (поскольку $\boldsymbol{a}' \succ \boldsymbol{b}'$ и $\boldsymbol{a}'' \succ \boldsymbol{b}''$), при этом весь набор $(b_1, \ldots, b_n)$ перейдет в $(a_1, \ldots, a_n)$. Лемма доказана.

Теперь неравенство Караматы очевидно. С помощью раздвиганий от набора $(b_1, \ldots, b_n)$ перейдем к $(a_1, \ldots, a_n)$ (лемма 2), при этом на каждом раздвигании сумма $f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)$ возрастает (лемма 1).

Упражнения

3 (из задач Соросовских олимпиад). Докажите неравенство

$$\frac{xy}{z^2} + \frac{xz}{y^2} + \frac{zy}{x^2} \ge \sqrt{\frac{xy}{z^2}} + \sqrt{\frac{xz}{y^2}} + \sqrt{\frac{zy}{x^2}},$$

где $x, y, z > 0$.

4 (М506). Пусть a, b, c, d – положительные числа. Докажите, что

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 2abcd \ge$$
$$\ge a^2b^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + c^2d^2.$$

5. Докажите «весовое» неравенство Караматы

$$m_1 f(x_1) + m_2 f(x_2) + \ldots + m_k f(x_k) \ge$$
$$\ge m_1 f(y_1) + m_2 f(y_2) + \ldots + m_k f(y_k)$$

для упорядоченных наборов $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, удовлетворяющих соотношениям

$$\begin{cases} m_1x_1 \ge m_1y_1, \\ m_1x_1 + m_2x_2 \ge m_1y_1 + m_2y_2, \\ \ldots \\ m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_{n-1}x_{n-1} \ge \\ \ge m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_{n-1}y_{n-1}, \\ m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n = \\ = m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_ny_n \end{cases}$$

при $m_i \in \boldsymbol{R}^+$.

[2] *В олимпиадном сленге этот прием, за его прямолинейность и универсальность, называют «дубиной».*